African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 1, Issue 4, October-December 2022, Page No:45-51
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index

حل سلاسل ماركوف بالمصفوفة العشوائية
Solving Markov Chains with Random Array

مبروكة الشارف غيث[1*]، حميدة المبروك غيث[2]
[1]قسم الرياضيات، كلية العلوم والموارد الطبيعية، جامعة الجفارة، ليبيا
[2]قسم الهندسة الكهربائية، المعهد العالي للعلوم والتقنية الزهراء، ليبيا

Mabrouka Alsharif Ghaith[1*], Hameda Almbrouk Ghaith[2]
[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Natural Resources, Aljafara University, Libya
[2]Electrical Engineering Department, Higher Institute of Science and Technology Alzahra, Libya

[*]*Corresponding author: mabroukaghaith81@gmail.com*

الملخص
تناول هذا البحث دراسة عملية ماركوف وهو نموذج مؤشر عشوائي يحتوي علي خاصية ماركوف ويمكن استخدمه في تصميم نموذج عشوائي الذي يتغير وفقا لقاعدة التحول، وتستخدم عمليات ماركوف في كثير من المجالات منها: تعلم الآلة (التعلم المعزز) والتعرف علي الأنماط وتشخيص الأمراض وقرارات العلاج وبشكل خاص يحتاج مؤشر المعلمة الدولة الفضاء والوقت النظام علي ان تكون محددة، ويوجد حالات مختلفة من عملية ماركوف لمستويات مختلفة من الحالات عموماً وللزمن المتقطع مقابل الزمن المتواصل، سلاسل ماركوف لديها العديد من التطبيقات تقنيات الحوسبة والانترنت.
المشكلة الأساسية من قرارات عملية ماركوف هي العثور على السياسة لصانع القرار، وهي تهدف إلى اختيار السياسة التي تقوم بتعظيم بعض الدوال التراكمية للحالات العشوائية، ويمكن لقرارات عملية ماركوف أن تحل من خلال البرمجة الخطية والبرمجة الديناميكية.
حيث تم دراسة سلاسل ماركوف وخاصيتها، ومصفوفة العشوائية وانواعها، تم تطبيق سلاسل ماركوف بالمصفوفة العشوائية باستخدام برنامج (Maple)، تم ايجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية واستقراريه حلها.
الكلمات المفتاحية: سلاسل ماركوف، مصفوفة عشوائية، القيم الذاتية، المتجهات الذاتية، الاستقرار.

تاريخ الاستلام: 2022-09-19	**تاريخ القبول:** 2022-09-30	**تاريخ النشر:** 2022-10-01

Abstract
This research deals with the study of the Markov process, which is a random indicator model that contains a Markov property and can be used to design a random model that changes according to the transformation rule. Markov processes are used in many areas, including: machine learning (reinforcement learning), pattern recognition, disease diagnosis and treatment decisions, in particular The pointer of the parameter state, space, and time of the system needs to be specified, and there are different states of the Markov process for different levels of states in general and for discrete versus continuous time. Markov chains have many applications in computing and Internet technologies.
The main problem of Markov process decisions is to find the policy for the decision maker, and it aims to choose the policy that maximizes some cumulative functions for random cases, and Markov process decisions can be solved through linear programming and dynamic programming.
Where Markov chains and their properties were studied, and the stochastic matrix and its types, Markov chains were applied in the random matrix using the (Maple) program, the eigenvalues and eigenvectors were found and their stability was resolved.
Keywords: Markov chains, Random matrix, Eigenvalues, Eigenvectors, Stability.

Received: September 19, 2022	Accepted: September 30, 2022	Published: October 01, 2022

1- مقدمة

العمليات العشوائية هي عائلة من المتغيرات العشوائية $X(t)$ المرتبطة بجميع القيم $t \in T$.ونسمي $\{X(t): t \geq 0\}\{X(t): t \geq 0\}\{X(t): t \geq 0\}\{X(t): t \geq 0\}$ بفضاء المعلمة ويرمز له بالرمز T [1][2].

2- سلاسل ماركوف

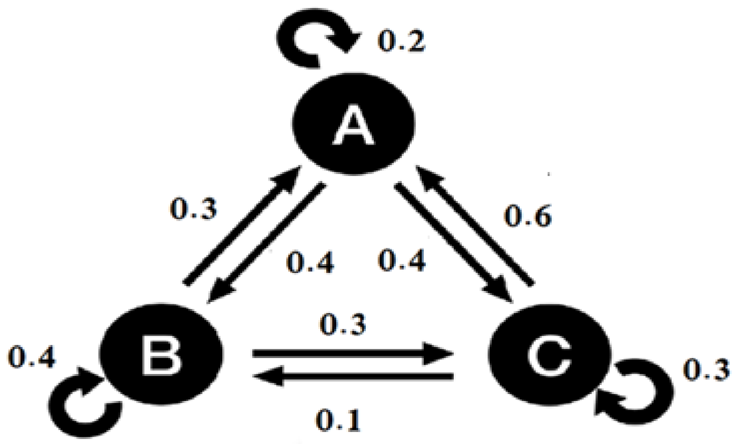
سلسلة ماركوف هي سلسلة من المتغيرات العشوائية التي تأخذ حالات في فضاء الحالة المحدد[3] .

تكون خاصية ماركوف:

$$P(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) = P(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1})$$

حيث n هي معلمة الخطوة الزمنية وx هو متغير عشوائي يأخذ قيمة في فضاء حالة معينة s [4].

فمثلاً سلسة ماركوف بفضاء الحالة $\{A, B, C\}$



شكل1 سلالة ماركوف،

فالانتقال من الحالة B إلى A تكون 30% وتكتب رياضياً

$$P(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = A \setminus X_{n-1} = B)$$

➢ **الاحتمالات الابتدائية**

يسمي الشعاع $P^{(0)} = \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_m^{(0)}\right)$ بشعاع الاحتمالات الابتدائية لسلسلة ماركوف $\{X_n: n = 0,1,2,3, \dots\}$ ذات فضاء الحالة $S = \{1,2, \dots, m\}$ [5].

3- مصفوفة العشوائية

هي مصفوفة كل عنصر فيها عبارة عن احتمال انتقال مشروط، وتكتب المصفوفة علي شكل $P = \left(P_{ij}\right)$، P_{ij} هو عنصر يمثل احتمالية انتقال العملية إلى الحالة j علماً أنها في الحالة i [6].هناك عدة انواع المصفوفة العشوائية:

1- المصفوفة العشوائية من الجهة اليسرى هي مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة، كل صف مجموعه 1.

2- المصفوفة العشوائية من الجهة اليمنى هي مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة، كل عمود مجموعه 1.

3- المصفوفة العشوائية المزدوجة هي مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة، كل صف وعمود مجموعه 1 [7].

وتتميز المصفوفة العشوائية بصفتين هما:

A. كل عنصر من عناصر المصفوفة يمثل قيمة احتمالية، أي

$$\sum_{\forall j} P(i,j) = 1 , \quad 0 \le P(i,j) \le 1$$

B. مجموع عناصر كل صف وعمود من صفوف واعمدة المصفوفة يساوي الواحد الصحيح، أي

$$\sum_{i,j\in T} P_{ij} = 1 \quad ; \quad \forall_j \in T \text{ [8]}$$

تعريف (1)

لتكن λ_i $\quad i = 1,2,\dots,n$ قيم ذاتية للمصفوفة $A(n\times n)$، ونصف قطرها الطيفي يعرف كما يلي:

$$\rho(A) = \max_i(|\lambda_i|)$$

مبرهنة (1)

إذا كانت $A = \left(a_{ij}\right)$ ذات قيم غير سالبة وغير قالة للاختزال فإن:

- إحدى قيمها الذاتية موجبة وأكبر من أو تساوي من جميع القيم الذاتية الأخرى، تسمي هذه القيمة الذاتية لمصفوفة المهيمنة.
- هناك شعاع ذاتي موجب يقابل تلك القيمة الذاتية.
- $\rho(A)$ تساوي القيمة الذاتية المهيمنة للمصفوفة وتحقق:

$$\min_i \sum_j a_{ij} \le \rho(A) \le \max_i \sum_j a_{ij}$$

فإن عملية ماركوف أنها غير قابلة للاختزال إذا كان الوصول لأي حالة من حالاتها بانتقال واحد أو بسلسلة من الانتقالات المسموحة [8].

4- الاستقرارية وحالة الثبات لسلسلة ماركوف

التوزيع π يدعي التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف إذا كان $P\pi = \pi$ [9].

مبرهنة (2)

إذا كانت A مصفوفة مربعة:

- يوجد شعاع X وحيد، يسمي شعاع احتمال حيث: $AX = X$.
- $X_{n+1} = AX_n$، وهذا صحيح مهما كان شعاع الاحتمال الذي يستخدم كحالة أولية X_0 [10].

فيكون الحل

اولاً: حل معادلة الفرق

مستخدمين صيغة $X_t = A^t X_0$:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = (PD^tP^{-1})X_0$$

ثانياً: دراسة الاستقرارية

تعتمد سلاسل ماركوف على الاحتمال (محصور بين 0،1) لذلك فالعملية تعتبر مستقرة في الامد الطويل، فعملية ماركوف مستقرة بطبيعتها في كل مرة نجد المجموع 1

لنفرض معادلة الفرق التالية $U_{t+1} = AU_t$ نريد دراسة سلوكها لما $(n \to \infty)$ بفرض أن A مصفوفة قطرية فأن الحل U_t يكون عبارة عن التوليفة التالية:

$$U_t = (PD^tP^{-1})X_0 = C_1\lambda_1^t v_1 + \cdots + C_n\lambda_n^t v_n$$

ونمو U_t محكوم بالعامل λ_i^t ، لذلك الاستقرار يعتمد علي القيم الذاتية للمصفوفة A. كلما كانت جميع القيم الذاتية تحقق الشرط $|\lambda_i| < 1$ يكون الاستقرار. وتكون U_t مستقرة بطبيعتها إذا كان $|\lambda_i| \leq 1$. أما إذا كان $|\lambda_i| > 1$ علي الأقل لأحدي القيم الذاتية للمصفوفة A تكون حالة عد الاستقرار.

فالاستقرارية تعني عدم تغير الصفات الإحصائية للعملية العشوائية بدرجة أو بمرور الزمن، ومن خلال تطبيق علي الاحتمالات الانتقالية ببعضها n مرة [11].

5- الأمثلة والنتائج

مثال (1)

في دراسة تطور البطالة في منطقة معينة، يعطي حجم المجتمع النشط، ويفترض أنه ثابت 200000 شخص، مقسم إلى 150000 عامل و 50000 بطال، نرمز ل x_t العدد الفعلي للعاملين في بداية السنة t و y_t عدد العاطلين في نفس السنة، نفترض أن 90% من العاملين في السنة الموالية يبقون دائما في حالة شغل مقابل 10% الذين يحالون إلى البطالة.

نفس الشيء بفرض أن 20% من العاطلين في السنة الموالية سيحصلون على عمل مقابل 80% يبقون على نفس الحال.

تطبيق

```
> steadystateVector := Proc ( p : : Matrix )
>  #DECLARE  LOCAL  VARIABLES
> local  n , Q,  e ,  QT ,  b ;
>    #MAKE  THE  PROCEDURE  SELF  CONTAINED  BY  LOADING  REQUIRED
          PACKAGES  INSIDE THE  PROCEDURE
>  use  LinearAlgebra  in
> #EXTRACT  THE  DIMENSION  OF  THE  TRANSITION  MATRIX  P
> n  :  Dinmension (  P  )  [1] ;
> #Q = P  -  I
> Q   := P  -  IdentityMatrix (  n  )  ;
>                #e  IS  THE  VECTOR  OF  ALL  ONES
>               # e    : =  ⟨seq (1 ,  i = 1 . . n) ⟩;
> #APPEND  VECTOR  e  TO  Q  AND  TRANSPOSE  THE  RESULT
> #QT  : =  Transpose (  ⟨Q    |  e⟩  )  ;
>    #b  IS  THE  UNIT   VECTOR  WITH  1  IN  POSITION  n+1
> #b  : =  Unitvector (  n + 1  ,  n + 1  )  ;
> #SOLVES THE LINEAR  SYSTEM  QT·Pi  =b .
> return  LeastSquares (  QT ,  b  )  ;
```

> end use :

> end proc :

> > P := Matrix ([0.9 , 0.1] ,

> [0.2 , 0.8]]) ;

> $$P := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

> Note that steadyStatevector procedure computes pi symbolically. Numerical values **for** lambda **and** mu are **not**

> required.

> > pi := steadystatevector (p) ;

> $$\pi := \begin{pmatrix} 0.666666666666666 \\ 0.333333333333334 \end{pmatrix}$$

- نستنج أن مصفوفة العشوائية مغلقة فتكون غير قابلة للاختزال وغير دورية.

ومن المبرهنة (1) اذا كانت جميع القيم الذاتية الأخرى أصغر من $\lambda_1 = 1$ فيكون الحد الأول من الصيغة مهيمنا تماما، الأخرى تؤول بسرعة إلى الصفر. λ_i^n

حالة الاستقرار هذه يمكن أن تتأكد إذا كانت المصفوفة A موجبة $\rho_{ij} \geq 0$، فيكون شعاع $C_1 v_1$ مركبات موجبة فقط مجموعها 1 .

إذن نسبة البطالة المتوقعة في الأمد البعيد لهذه البلدة إذا لم تقم الحكومة بأي إصلاحات في هذه المنطقة من بناء المصانع، فتح مراكز تكوين،، هو 33.33%، فنلاحظ أن أقطره المصفوفة تساعدنا في فهم ماركوف والأنواع المشابهة من معادلات الفرق الخطية.

مثال (2)

لنفرض أن لدينا شركتين تتنافسان على زبائن في منطقة ما 200 زبون، المعلومات المتعلقة بهؤلاء الزبائن في هذه المنطقة موضحة في الجدول التالي:

	A	B	لا شيء
الزبون الذي يذهب إلى الشركة A	0.7	0.15	0.3
الزبون الذي يذهب إلى الشركةB	0.2	0.8	0.2
الزبون الذي لا يذهب إلى أي الشركة	0.1	0.05	0.5

نفرض أنه في نهاية الأسبوع 0 من المعلوم أن 10000 زبون ذهبوا إلى A و8000 زبون ذهبوا إلى B و2000 لم يذهبوا إلى أي شركة، هل يمكننا توقع عدد المتسوقين في كل سوبر ماركت في الأسبوع القادم، وفي الأمد الطويل؟

ليكن نسبة المتسوقين الذين يذهبون الى السوبر ماركت (A,B) أو الذين لم يذهبوا إلى أي واحد منهم.

تطبيق

> steadystateVector := Proc (p : : Matrix)

> #DECLARE LOCAL VARIABLES

> local n , Q, e , QT , b ;

```
> #MAKE THE PROCEDURE SELF CONTAINED BY LOADING REQUIRED
        PACKAGES INSIDE THE PROCEDURE
> use LinearAlgebra in
> #EXTRACT THE DIMENSION OF THE TRANSITION MATRIX P
> n : Dinmension ( P ) [1] ;
> #Q = P - I
> Q := P - IdentityMatrix ( n ) ;
>            #e IS THE VECTOR OF ALL ONES
>            # e   : =  ⟨seq (1 , i = 1 . . n) ⟩;
> #APPEND VECTOR e TO Q AND TRANSPOSE THE RESULT
> #QT : = Transpose ( ⟨Q  | e⟩ ) ;
> #b IS THE UNIT VECTOR WITH 1 IN POSITION n+1
> #b : = Unitvector ( n + 1 , n + 1 ) ;
> #SOLVES THE LINEAR SYSTEM QT·Pi =b .
> return LeastSquares ( QT , b ) ;
> end use :
> end proc :
> > P := Matrix ([ [1 − 0.3 , 0.2, 0.1] ,
>                    [0.15 , 1 − (0.15 + 0.05), 0.15], [0.3, 0.2, 1 − 0.5] ] );
```

$$P := \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
> Note that steadyStatevector procedure computes pi symbolically. Numerical values
      for lambda and mu are not
> required.
> > pi := steadystatevector ( p ) ;
```

$$\pi := \begin{bmatrix} 0.375000000000000 \\ 0.500000000000000 \\ 0.125000000000000 \end{bmatrix}$$

- نستنج أن مصفوفة العشوائية مغلقة فتكون غير قابلة للاختزال وغير دورية.

ومن المبرهنة (1) اذا كانت جميع القيم الذاتية الأخرى أصغر من $\lambda_1 = 1$ فيكون الحد الأول من الصيغة مهيمنا تماما، λ_i^n الأخرى تؤول بسرعة إلى الصفر.

فأنه يوجد توزيع مستقر وحيد $\pi(x, y, z)$ ، حيث $P\pi = \pi$

حالة الاستقرار هذه يمكن أن تتأكد إذا كانت المصفوفة A موجبة $\rho_{ij} \geq 0$، فيكون شعاع $C_1 v_1$ مركبات موجبة فقط مجموعها 1 .

إذن نسبة المتسوقين المتوقعة في الأمد البعيد لهذه الشركات إذا يقوم سوبر ماركت بتخفيض وتنوع واحتياجات الزبائن وإتاحة مزيد من الوقت،...، هو 87.5% ، فنلاحظ أن أقطره المصفوفة تساعدنا في فهم ماركوف والأنواع المشابهة من معادلات الفرق الخطية.

6- التوصيات

وعليه نوصي بما يلي: -

1- ضرورة اهتمام الباحثين بموضوع سلاسل ماركوف باستخدام المصفوفات العشوائية.
2- اجراء مزيد من الدراسات باستخدام المصفوفات العشوائية لما تتمتع به من تطبيقات واسعة في العديد من المجالات العلمية ولمدد اطول وذلك للحصول على نتائج أكثر دقة.
3- تطبيق هذه الدراسة باستخدام مصفوفة العشوائية كألية للمجالات الرياضيات، الفيزياء النووية، الاحياء، الطب وغيرها من مجالات.

7- المراجع:

❖ **المراجع العربية:**

1- محمد بداوي، الاحتمالات، دار هومة، الجزائر، 2017.
2- فتحي خليل الحمدان، بحوث العمليات، دار وائل، عمان، 2010.
3- سليمان صالح الحمدان، طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية وغير الخطية، العبيكان، الرياض، 1431/2010.
4- محمد حازي، الدوال ذات عدة متغيرات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.
5- لطفي تاج، عمار محمود سرحان، مقدمة في العمليات العشوائية، جامعة الملك سعود، الرياض، 1428/2006.

❖ **المراجع الاجنبية:**

6- Stefan M. Stefanov, Separable Optimization: Theory and Methods, Second Edition, Springer, Switzerland, 2021.
7- Nicolas Privault, Understanding Markov Chains: Examples and Applications, Springer Singapore Heidelberg New York Dordrecht London, 2013.
8- Mohamed Aidene, Brahim oukacha, Recherche opérationnelle: programmation linéaire, pages bleues, Alger, 2007.
9- Ali Bougherra, La: programmation linéaire, editions Houma, Alger, 2010.
10- Xin-She Yang, Optimization Techniques and Applications with Examples, John Wiley & Sons ,USA, 2018.
11- Jan A. Snyman · Daniel N. Wilke, Practical Mathematical Optimization, Second Edition, Library of Congress Control, USA, 2018.