African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 4, Issue 1, January - March 2025
Page No: 455-468
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index
ISI 2024: 0.877 SJIFactor 2024: 6.752 معامل التأثير العربي: 1.62

فضاء هلبرت وبعض المتتاليات التي تكون حلول لبعض المعادلات التفاضلية

أ. ذكريات عبد المولى سالم العيساوي [1*]، أ. رمضان محمد النعاس [2]
[1] قسم الرياضيات، كلية التربية القصيعة، جامعة الزيتونة، ليبيا
[2] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الزيتونة، ليبيا

Hilbert space and some sequences that are solutions to some differential equations

Thekryat Abdul Mawla Salem Al-Issawi [1*], Ramadan Muhammad Al-Naas [2]
[1] Department of Mathematics, Faculty of Education Al-Qasi'a, Al-Zaytouna University, Libya
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science, Al-Zaytouna University, Libya

*Corresponding author: dkabdo224@gmail.com

تاريخ الاستلام: 2025-01-12	تاريخ القبول: 2025-03-17	تاريخ النشر: 2025-03-24

الملخص

بشكل عام يعتبر فضاء هيلبرت أحد أهم الفضاءات في التحليل الرياضي والرياضيات التطبيقية. إنه بمثابة أداة أساسية لفهم العديد من الظواهر العلمية والرياضية. يستخدم هذا الفضاء على نطاق واسع في نظرية المعادلات التفاضلية، وخاصة في دراسة القيم الذاتية والدوال الذاتية لحل بعض المعادلات التفاضلية باستخدام الأساليب الطيفية. قدمنا في هذه الورقة، بعض المتتاليات التي تكون حل لبعض المعادلات التفاضلية من نوع مسألة شتورم-ليوفيل. من المعروف أنه لكل منها، توجد قيمة ذاتية تتوافق مع دالة ذاتية. هذه الدوال الذاتية مستقلة خطيًا، علاوة على ذلك، فإن الدوال المتعامدة والمعيارية منها يمكن استخدامها كأساس لبناء فضاءات فرعية داخل هيلبرت. كذلك تستخدم في تحليل أعمق للأنظمة التفاضلية المعقدة. وهي أدوات فعالة تساهم في فهم الطبيعة الطيفية للمشغلات التفاضلية وتوصيف سلوك الأنظمة الديناميكية بشكل عام.

الكلمات المفتاحية: فضاء هيلبرت، منظومة شتروم لوفيل، الشرطين الحديين، الدوال الذاتية، القيمة الذاتية.

Abstract

In general, Hilbert Space and its Applications in Differential Equations Theory. Hilbert space is considered one of the most important spaces in mathematical analysis and applied mathematics. It serves as a fundamental tool for understanding many scientific and mathematical phenomena. This space is widely used in the theory of differential equations, particularly in studying the eigenvalues and eigenfunctions of differential operators using spectral methods. In this paper, the focus is on solving differential equations of the Sturm- Liouville problem type. It is well known that for each, there exists an eigenvalue corresponding to an eigenfunction. These eigenfunctions are linearly independent, which allows them to be used as basis to construct subspaces within the Hilbert. Moreover, the orthogonal functions, enabling a deeper analysis of complex differential systems. These methods are effective tools for solving differential equations, as they contribute to understanding the spectral nature of differential operators and characterizing the behavior of dynamic systems in general.

Keywords: Hilbart space, the Sturm - Liouville problem, the eigen vales, eigen functions.

المقدمة

تعتبر فضاءات هيلبرت أحد أهم الفضاءات في الرياضيات التطبيقية والتحليل الرياضي، حيث تشكل أداة أساسية لفهم العديد من الظواهر العلمية والرياضية، خاصة في مجالات الفيزياء النظرية والهندسة، وتتميز هذه الفضاءات بخواصها البنيوية التي تتيح دراسة التحليل الدالي، ومعالجة مسائل ذات أبعاد لا نهائية بطريقة منظمة وفعالة. ومصطلح فضاء هيلبرت يشير للمفهوم المجرد الذي يمكن وراء العديد من هذه التطبيقات المتنوعة، وأدى نجاح أساليب هيلبرت إلى عصر مثمر للغاية للتحليل الوظيفية، فتمت دراسة فضاءات هيلبرت بداية من العقد الأول من القرن العشرين بواسطة ديفيد هيلبرت وأرهارد شميت، وهي أدوات لا غنى عنها في نظريات المعادلات التفاضلية الجزئية وميكانيكا الكم وتحليل فورييه وفي المعادلات التفاضلية، تستخدم الطرق الطيفية على فضاءات هيلبرت المناسبة لدراسة سلوك القيم الذاتية والدوال الذاتية للمعادلات التفاضلية العادية.

وفي هذه الورقة، دراسة لبعض المتتاليات التي تكون حلول بعض المعادلات التفاضلية، التي ت من استخدامها في بناء أساس لفضاء هليبرت. فعلى سبيل المثال المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+[\lambda p(x)-q(x)]y=0$$

التي تحقق الشروط الحدية**:**

$$l_1y'(a)+h_1y'(a)=0$$

$$l_2y'(b)+h_2y'(b)=0$$

هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية. سميت هكذا نسبة إلى عالمي الرياضيات الفرنسيين جاك شارل فرانسوا ستروم وجوزيف ليوفيل.

حيث إن λ بارمترا لا يعتمد على x لكل $a<x<b$. حلول هذه المعادلة تلعب دوراً مهم في العديد من الجوانب، فإن الحل العام لهذه المنظومة يكمن في أن لكل قيمة ذاتية λ_n تناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$ و تشكل الدوال الذاتية دوال من (الجيب – جيب التمام) وهي حلولاً مستقلة خطيًا ومتعامدة ضمن فترة معينة $a<x<b$. وكذلك الدوال المعيارية لها متعامدة . خصصنا الجزء الأول من هذه الورقة لبعض التعاريف والمفاهيم الأساسية لفضاء هيلبرت، اما الجزء الثاني من هذه الورقة قد خصص لبعض الأمثلة التي تبين أن الحلول لمثل هذه المعادلات هي عبارة عن دوال ذاتية $y_n(x)$ مناظرة لقيمة ذاتية λ_n ، وكيفية بناء أساس معياري متعامد لفضاء هيلبرت من هذه الدوال الذاتية المتعامدة والمعيارية.

تعاريف ومفاهيم

تعريف (1.1)

ليكن x فضاء متجهي على المجال $k=C$ أو $K=R$ نقول

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\langle x,y\rangle\to\langle x,y\rangle$$

ضرب داخلي على X إذا تحقق الشروط الآتية:

لكل $\alpha\in R \qquad x,y,z\in X$

فإن

1) $\langle\alpha x+y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y\cdot x\rangle}$

3) $\|x\|^2=\langle x,x\rangle\geq 0$

4) $\|x\|^2=\langle x,x\rangle=0 \quad\Leftrightarrow x=0$

تعريف (2.1)

ليكن $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء ضرب داخلي نقول ان H فضاء هيلبرت إذا كان $(H,\|\cdot\|)$ فضاء معياري تام حيث ان $\|\cdot\|$ المعيار المصاحب للضرب الداخل $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

ملاحظة/ ليكن $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ضرب داخلي $\|\cdot\|$ المعيار المرافق له

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

نظرية (1.1) ((متباينة كوشي شوارتز))
لتكن $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي ليكن $\{x_n\},\{y_n\}$ متتاليتي عناصر من E و x,y من E فإن:

$$\{x_n \to x \ \wedge y_n \to y\} \Longrightarrow \{\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle\}$$

تعريف (3.1)
نقول ان $A=\{x_n\!: n\geq 1\}$ من فضاء شبه هلبرت E أنها متعامدة إذا كانت لكل x_i, y_i من A

$$\langle x_i, x_i\rangle = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

تعريف (4.1)
يسمى فضاء هلبرت كل فضاء شبه هلبرت تام ((كل متتالية كوشية من فضاء شبه هلبرت E متقاربة في E))
نتيجة/ علاقة التعامد متناظرة أي أن $x \perp y$ فإن $y \perp y$

1) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$

$$x \perp 0 \ \forall x$$

2) $\forall\, x,y \in E\ ; \forall\, \alpha,\beta \in R$

فإن

$$x \perp y \Leftrightarrow \alpha x \perp \beta y$$

تعريف (4.1)
نقول ان المتتالية $A=\{x_n\!: n\geq 1\}$ من فضاء شبه هلبرت مستقلة خطيًا.
الاثبات/ المتتالية $A=\{x_n\!: n\geq 1\}$ المتعامدة والمتجانسة في فضاء هلبرت. لنفرض ان
$\{\alpha_i\}_i \in \mathbb{N}$ متتاليان من المجال k

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + n + \alpha_n x_n = 0$$
$$\Rightarrow < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + n + \alpha_n x_n \geq 0$$
$$\alpha_j\langle x_j \cdot x_j\rangle = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$$
$$\alpha_j = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

وبالتالي $A=\{x_n\!: n\geq 1\}$ مستقلة خطيًا

تعريف (5.1)
إذا كان X فضاء معياري $A\subset x$ نقول ان A تامة إذا كان الفضاء الخطي الجزئي المولد من A كثيف من X

$$X = \langle \bar{A}\rangle$$

تعريف (6.1)
نقول ان$A=\{x_n\!: n\geq 1\}$ أساس هلبرت إذا كان $\{x_n\!: n\geq 1\}$ متتالية معيارية تامة.
تعريف (7.1)
ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بالإضافة الى شرطين حديين متجانسين لدالة مجهولة $y(x)$.

$$\frac{d}{d\varkappa}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda p(x) - q(x)]y = 0$$
$$l_1 y'(a) + h_1 y'(a) = 0$$
$$l_2 y'(a) + h_2 y'(a) = 0$$

حيث ان p,r,q دوال حقيقية p لها مشتقة متصلة وكذلك r,q دالتان متصلتان , $p>0$, $r>0$ لكل قيم x.
بحيث $a<x<b$ ، λ بارمترا لا يعتمد على x .
وان h_2,h_1,l_2,l_1 ثوابت حقيقية مستقلة عن البارمترا λ ,حيث ان l_2,l_1 لانيلاشيان معًا وكذلك h_2,h_1 لاتيلاشان معًا.
تسمى هذه المسألة بمنظومة شتروم لوفيل. وحلول هذه المنظومة تشكل دوال ذاتية يرمز لها بالرمز $y_n(x)$ و هذه الدوال الذاتية،هي دوال تشكل(الجيب، وجيب التمام) وتكون مناظرة لقيم الذاتية λ_n ,كذلك هي دائمًا متعامدة عل الفترة $a\leq x\leq b$.
نظرية (2.1)
إذا كانت $x=x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

وكانت الدوال $r(x),p(x),q(x)$ هي دوال تحليلية في x أي يمكن التعبير عنها بمتسلسلة قوى في x. فان الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه يمكن كتابته على الصورة.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y(x)$$

حيث ان c_2, c_1 ثوابت اختيارية ، y_2, y_1 حلول مستقلة خطيًا عند x.

نظرية (3.1)

تكون جميع القيم الذاتية لمنظومة شروم لوفيل حقيقية وتكون جميع الدوال الذاتية المناظرة للقيم الذاتية المعنية متعامدة مع $p(x)$

$$\int_a^b p(x) y_n(x) y_m(x)\, dx = 0$$

نظرية (4.1) جرام سميت Gram-Suhmidt

ليكن $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء هلبرت وليكن E فضاء جزئي من H ، $B = \{x_0, \dots \dots .\ \ x_n\}$ متتالية مستقلة خطيًا من E وبالتالي فان يمكن بناء أساس معياري متعامد بحيث $v =$. $\{e_0, e_1, e_2, \dots en\}$

-الآن.... لندرس المتتالية $x_n = cos\, nt\, ; n = 0,1, \dots$

من نظرية جرام شميت، نجد ان $e_n(t)$ متتالية متعامدة حيث ان:

$$e_0(t) = \frac{v_0}{\|v_0\|} = \frac{x_0}{\|x_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \qquad n = 0,1, \dots$$

يمكن كتابته x_1 بالشكل

$$x_1 = \langle x_1, e_0\rangle e_0 + v_1$$

فان

$$v_1 = x_1 - \langle x_1, e_0\rangle e_0$$

وهو متجه غير صفري وكذلك $v_1 \perp e_0$ أي ان

$$\langle x_1, e_0\rangle e_0 = \left\langle cos\, t\, , \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \left\langle \cos t\, , \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos 2t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin t \left.\begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix}\right| = 0$$

$$v_1 = \cos t - 0 = \cos t$$

وبذلك نتحصل على

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{cos\, t}{\|cos\, t\|}$$

$$\|cos\, t\| = \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2t)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\Pi}\right]$$
$$= \sqrt{\pi}$$
$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{cos\,t}{\sqrt{\pi}}$$

وكذلك يمكن كتابة x_2على الشكل

$$x_2 = \langle x_2, e_0\rangle e_0 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 + v_2$$

ومنه نتحصل على

$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_0\rangle e_0 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$$
$$= \cos 2t - \left\langle \cos 2t\,, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left\langle \cos 2t\,, \frac{cos\,t}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{cos\,t}{\sqrt{\pi}}$$
$$\langle x_2, e_0\rangle e_0 = \left\langle \cos 2t\,, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\left\langle \cos 2t\,, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \cos 2t\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left\langle \cos 2t\,, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(0) = 0$$

$$\langle x_2, e_1\rangle e_1 = \left\langle \cos 2t\,, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}$$
$$\left\langle \cos 2t\,, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} (\cos 2t\,.\cos t\,)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[cos2t + cost]dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} cos3tdt + \int_0^{2\pi} costdt\right]\right) = 0$$

$$e_2 = cos2t$$
$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{cos2t}{\|cos2t\|}$$

$$\|cos2t\| = \left[\int_0^{2\pi} cos^2 2tdt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|cos2t\| = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1+cos4t}{2} dt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{cos4t}{2} dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

وحيث ان

$$\langle e_2, v_1 \rangle = 0 \qquad \Rightarrow e_2 \perp v_1$$

وكذلك نتحصل على

$$\Rightarrow \quad e_2 \perp v_0$$

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_0 \rangle e_0 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$$
$$v_3 = \cos 3t - \left\langle cos3t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left\langle cos3t, \frac{cost}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{cost}{\sqrt{\pi}} - \left\langle cos3t, \frac{cos2t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{cos2t}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\langle \cos 3t\,, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos 3tdt = 0$$

$$\left\langle \cos 3t\,, \frac{cost}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} (\cos 3t \frac{cost}{\sqrt{\pi}}) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos 3tcostdt$$

من المتطابقة:

$$\left[\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))\right]$$

$$\cos 3t \cos t = \frac{1}{2}(\cos(3t+t) + \cos(3t-t))$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(4t) + \cos(2t))$$

فيصبح التكامل:

$$\left\langle \cos 3t\,, \frac{cost}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} . \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 4tdt + \int_0^{2\pi} \cos 2tdt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} . \frac{1}{2} (0+0) = 0$$

$$v_3 = \cos 3t$$

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{cos3t}{\|cos3t\|}$$

$$\|cos3t\| = \left[\int_0^{2\pi} cos^2 3tdt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^{2\pi} \left[\frac{1+cos6t}{2}\right] dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_0^{2\pi} cos^2 3tdt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{cos6t}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_0^{2\pi} cos^2 3tdt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\pi}{2} + 0\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{cos3t}{\sqrt{\pi}}$$

وهكذا حتى نتحصل على المتتالية المتعامدة

$$e_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n(t)\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$$

وبشكل مشابه إذا كان لدينا المتتالية

$$y_n = sin\, nt \qquad ; n = 1, \dots$$

نتحصل على المتتالية المتعامدة

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{\tilde{u}_n(t)}{\|\tilde{u}_n(t)\|} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \qquad n = 1,2, \dots.$$

ويمكن توضيح ذلك بالأمثلة العددية

مثال 1: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \qquad 0 < t < l$$

$$y(0) = 0 = y'(l)$$

لحل هذه المعادلة نجد ان

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$y(t) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

من الشرط الأول

$$y(0) = 0$$
$$0 = c_2 + c_2 \Longrightarrow c_1 = -c_2$$

أولاً: لنفرض ان $\lambda = 0$ وبتطبيق الشروط الحدية

$$y(t) = C_1 t + C_2$$
$$y(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$
$$c_2 = c_2 = 0$$

ثانياً: $\lambda > 0$ وبتطبيق الشروط الحدية

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + C_2 \sin\sqrt{\lambda} t$$
$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$$
$$\Longrightarrow c_1 = 0$$

$$y'(l) = -C_1 \cos\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,l$$
$$\cos\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,l = 0$$
$$\Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\,l = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}l = \frac{-\pi}{2}$$
$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi - \pi/2}{L}$$
$$\lambda_n = \frac{(n\pi - \pi/2)^2}{L^2}$$

وهي قيمة ذاتية

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi}{4L^2}$$

والدالة المناظرة للقية الذاتية λ_n

$$y_n(t) = c_2\, sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}t$$

لإيجاد الدالة المعيارية من المعادلة التفاضلية نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\frac{dy}{dt}\right) + B(t)\frac{dy}{dt} + [y(t) + \lambda p(t)]y = 0$$
$$\|y_n(t)\| = \int_0^L \Gamma_{(t)}\big(y(t)\big)^2\, dt = 1$$

حيث $\Gamma_{(t)} = e^{\int \frac{B(t)}{r(t)}dt} = e^0 = 1$

$$\|y_n(t)\| = \int_0^L \left[c_2 \sin\frac{(2n-1)}{2L}\right]^2 dt = 1$$
$$= c_2^2\int_0^L \frac{\sin^2(2\mathrm{n}-1)\pi t}{2\mathrm{L}}dt \; = c_2^2\int_0^L 1 - \frac{\left[\cos 2(2\mathrm{n}-1)\,{}^{\pi}\!/_{2l}\, t\right]}{2}dt$$
$$= \frac{c_2^2}{2}\int_0^L 1 - \cos 2\,\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi}{2\mathrm{L}}dt$$
$$= \frac{c_2^2}{2}[t|_0^l - \frac{2L}{(2n-1)\pi}\sin 2\,\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi}{2\mathrm{L}}t|_0^l$$
$$= \frac{c_2^2}{2} - \frac{2L}{(2n-1)\pi}\sin 2\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi}{2\mathrm{L}}t|_0^l$$
$$= \frac{c_2^2}{2} - \frac{2L}{(2n-1)\pi}\left[\sin 2\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi}{2\mathrm{L}} - \sin 0\right]$$

$$c_1 = -\sqrt{2}$$

$$y_n(t) = \sqrt{2}\frac{sin(2n-1)}{2L}\pi t$$

وهي دوال ذاتية معيارية ومتعامدة.

مثال 2: لتكن لدينا المعادلة

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \qquad\qquad 0 < t < 4$$

$$y'(0) = 0 = y'(4)$$

لحل هذه المعادلة نجد ان

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$$
$$r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

ويكون الحل العام

$$y(t) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}$$

ومن الشرط الحدي $y'(0) = 0$

$$y'(t) = -\sqrt{-\lambda}C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + \sqrt{-\lambda}C_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}$$

أولاً: لنفرض ان $\lambda < 0$

من الشرط الحدي $y'(0) = 0$ نجد ان

$$0 = -\sqrt{-\lambda}C_1 + \sqrt{-\lambda}C_2$$
$$\sqrt{-\lambda}C_1 = \sqrt{-\lambda}C_2$$

وكذلك من الشرط الحدي $y'(4) = 0$ نحصل على

$$0 = -\sqrt{-\lambda}C_1 e^{-4\sqrt{-\lambda}} + C_2\sqrt{-\lambda}e^{4\sqrt{-\lambda}}$$
$$= -\sqrt{-\lambda}C_1 e^{-4\sqrt{-\lambda}} + C_2\sqrt{-\lambda}e^{4\sqrt{-\lambda}}$$
$$0 = -\sqrt{-\lambda}C_1 e^{-4\sqrt{-\lambda}} + C_1\sqrt{-\lambda}e^{4\sqrt{-\lambda}}$$
$$0 = \sqrt{-\lambda}C_1\left[e^{-4\sqrt{-\lambda}} + e^{4\sqrt{-\lambda}}\right]$$
$$0 = C_1 = C_2$$

فان الحل العام $y(t) = 0$ وهو حل تافه

ثانياً: لنفرض ان $\lambda > 0$ للحصول على الحل العام نجد أن

$$r^2 = -\lambda \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$$
$$r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

وبذلك يكون

$$y(t) = C_1\cos\sqrt{\lambda}t + C_2\sin\sqrt{\lambda}t$$
$$y'(t) = C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t$$

ومن الشرط الحدي الأول $y(t) = 0$

$$0 = C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 0$$

سنحصل على

$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}t$

من الشرط الحدي الثاني

$y'(4) = 0$

$0 = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}4$

$\Longrightarrow \sin\sqrt{\lambda}4 = 0$

$\sqrt{\lambda}4 = n\pi$

$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{4} \qquad\qquad \Longrightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4^2}$$

وهي قيمة ذاتية مناظرة لدالة الذاتية

$y_n(t) = C_1\, cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)t$

ثالثاً: لنفرض ان $\lambda = 0$

$y'(t) = 0$

وبذلك سنحصل على $y'(t) = C_1$

أيضًا بالتكامل $y'(t) = C_1 t + C_2$

من الشرط الأول $\qquad y'(0) = 0;$

$$0 = C_1$$
$$0 = C_2$$

وهو حل تافه $\qquad y(t) = 0$

كذلك نجد من المعادلة

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\frac{dy}{dt}\right) + B(t)\frac{dy}{dt} + [q(t) + \lambda p(t)]y = 0$$

ولكن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \lambda y(t) = 0$$

حيث ان $B(t) = 0\;; \qquad r(t) = 1$

$$\Gamma_{(t)} = e^{\int \frac{B(t)}{r(t)}dt} = e^0 = 1$$

$$\|y_n(t)\| = \left[\int_0^4 \left(c_1 \cos\frac{n\pi}{4}t\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$= \frac{c_1^2}{2}\int_0^4 \cos^2\frac{n\pi}{4}t\, dt$$

$$= (\frac{c_1^2}{2}\int_0^4 \left[1+\cos\frac{2n\pi}{4}t\right] dt\ )^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{c_1^2}{2}\int_0^4 dt + \frac{c_1^2}{2}\int_0^4 \cos\frac{n\pi}{4}t\ \ dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}t\ \Big|_0^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}\left[\frac{2}{n\pi}(\sin\frac{n\pi}{4}t - \sin 0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{4\frac{c_1}{2}} = 1$$

$$= \frac{2c_1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}t$$

وهي دوال ذاتية معيارية ومتعامدة.

مثال 3: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \qquad\qquad 1 < t < 10$$

$$y'(1) = 0 = y(10)$$

نفرض ان

$$Ƶ = t - 1$$

$$\frac{dƵ}{dt} = 1\ \Rightarrow dƵ = dt$$

$$t = 1 \Rightarrow Ƶ = 0$$

$$t = 10 \Rightarrow Ƶ = q$$

الان..

$$y''(Ƶ) + \lambda y(Ƶ) = 0 \qquad\qquad 0 < Ƶ < q$$

لحل هذه المعادلة نجد ان

$$r^2 + \lambda = 0$$

$$r^2 = -\lambda$$

$$r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$y(Ƶ) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}Ƶ} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}Ƶ}$$

ومن الشرط الحدي نجد ان $y(0) = 0$

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$y(q) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(Ƶ) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}Ƶ} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}Ƶ} = 0$$
$$\Longrightarrow C_1 = C_2 = 0$$

ثانياً: لنفرض ان $0 = \lambda$ فان المعادلة تكون في الشكل

$$y''(Ƶ) = 0$$

ومن ذلك نجد ان

$$y(Ƶ) = C_1 Ƶ + C_2$$

من الشرطين الحدين

$$y(0) = 0$$
$$0 = C_2$$

$$y(z) = c_1 z$$
$$y(9) = 0$$
$$0 = 9C_1 \Longrightarrow C_1 = 0$$

ومنها نتحصل على الحل العام

$$y(t) = 0$$

وهو حل تافه

ثالثاً: لنفرض $0 < \lambda$ لحل المعادلة نتحصل على

$$r^2 = -\lambda \Longrightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

لنحصل على

$$y(Ƶ) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}Ƶ + C_2 \sin\sqrt{\lambda}Ƶ$$

من الشروط الحدية نجد ان

$$y(Ƶ) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}Ƶ$$

لكن $y(9) = 0$

$$0 = C_2 \sin q\sqrt{\lambda}$$
$$\sin 9\sqrt{\lambda} = 0$$
$$9\sqrt{\lambda} = n\pi$$
$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{9}$$
$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2$$

وهي قيمة ذاتية مناظرة للدالة الذاتية

$$y_n(t) = C_2\, sin\frac{n\pi}{9}Ƶ$$

$$y_n(t) = C_2\, sin\frac{n\pi(1-t)}{9}$$

ولكن

$$\|y_n(t)\| = \int_1^{10} \Gamma_{(t)} \left(y_n(t)\right)^2 dt$$

حيث

$$\Gamma_{(t)} = e^{\int \frac{B(t)}{r(t)} dt} = e^0 = 1$$

$$\|y_n(t)\| = \left[\int_1^{10} \left(C_2 \, sin \frac{n\pi(t-1)}{9} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[c_2^2 \int_1^{10} sin^2 \frac{n\pi}{9} (t-1) \, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث ان

$$sin^2 t = \frac{1 - cos\,2t}{2}$$

$$= \left[c_2^2 \int_1^{10} \frac{\left[1 - \cos 2 \left(\frac{n\pi(t-1)}{9} \right) \right]}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{c_2^2}{2} \int_1^{10} 1 - \cos 2 \;\; \cos 2 \frac{n\pi(t-1)}{9} dt \right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$= \frac{c_2^2}{2} [t|_1^{10} - \frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{9} (t-1)|_1^{10}]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{9c_2^2}{2} - \frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi 9}{9} - \sin 0 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{9} c_2}{\sqrt{2}} = 1$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

لنتحصل على

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{9}} \sin \frac{n\pi(t-1)}{9}$$

وهي دوال ذاتية متعامدة ومعيارية.

الخاتمة:

من خلال التحليل الرياضي لمنظومة شتروم لوفيل وتطبيق الشرطيين الحديين لها نجد ان الحل العام يتضمن لكل قيمة ذاتية λ_n تناظرها دالة ذاتية $y_n(x)$ ، ضمن الفترة $a < x < b$. تحصلنا على نتائج مرضية بحيث إن، هذه الحلول هي دوال مستقلة خطياً ومتعامدة مهي تشكل دوال من الجيب وجيب التمام وكذلك الدوال المعيارية لها متعامدة، ومن هنا بالإمكان بناء أساس معياري ومتعامد لفضاء هيلبرت من هذه الدوال المستقلة خطياً.

ونستنتج اذا كانت $y_n(x)$ دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n و كانت $C\neq0$ثابت فإن $Cy_n(x)$ كذلك دالة ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_n, وهي مستقلة خطيا ومتعامدة.

و في منظومة شتروم لوفيل لا يمكن أن نجد حلين مستقلين خطيا" مناظران لقيمة ذاتية واحدة، أي لا يمكن أن تكون دالتان ذاتيتان خطيتان مستقلتان مناظرة لنفس القيمة الذاتية.

المراجع:

1) أريروين كريزيك، المدخل الي التحليل الدالي وتطبيقاته – ترجمة خضر حامد الأحمد 1985.
2) محمد حازي، المقعد المجلي الدالي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2013.
3) عبد الواحد أبو صمرة، صلاح أحمد، محمد بشير قابيل، الطوبولوجيا -1-، مطبعة الخالدين سوريا – دمشق – 1991. –
4) د. الزوام أحمد دله واخرون المعادلات التفاضلية العادية ، 1997 ، عمان دار ارام.
5) Donald w. trim – Applied partial differential Equation-Boston pws publishing Company. 1990
6) Godokington E. A. and N Levinson J heory of ordinary differential Equation New York: Megt w – hill, 19953
7) RUBBEN A . MARTINEZ – AVENDAÑO PETER ROSENTHAL , An I ntroductuion to Operators on the Hardy – Hilpert Space ,Springer ,2007.
8) E. STROUSE , Le mémoire de: Propriétés Spectrales Des Opérateurs De Toeplitz, L,université de Bordeaux, 2010.
9) RANA, I.K ,An Introduction to Measure and Integration ,Alpha Science Indternational, 2005.
10) HENRI , CARTAN, Théorie Elémentaire des Fonctions Analytiqudes d,une ou Plusieurs Variables Complexes , Hermann éditeurs des sciences et des arts ,1992.
11) Introductory Functional analysis with Applications (JOHN WILEY & SONS New York. Chichester. Bribane. Toronto