African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 4, Issue 1, January - March 2025
Page No: 497-504
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index
ISI 2024: 0.877 **SJIFactor 2024: 6.752** **معامل التأثير العربي: 1.62**

تقريب العدد المتسامي (e) باستخدام المتباينة التحليلية للمتوسطات (الحسابي والهندسي والتوافقي)

أبو القاسم حسين أبو القاسم الزروق *
قسم تقنيات الحاسب الآلي، المعهد العالي للعلوم والتقنية، مزدة، ليبيا

Approximating the transcendental e using the Analytic Inequalities of the sample means (Arithmetic – Geometric- Harmonic)

Abu al-Qasim Hussein Abu al-Qasim Al-Zarouq *
Department of Computer Technology, Higher Institute of Science and Technology, Mizdah, Libya

*Corresponding author: alzrok7@gmail.com

تاريخ الاستلام: 2025-01-28	تاريخ القبول: 2025-03-19	تاريخ النشر: 2025-03-27

الملخص

في هذه الورقة سنقوم بمعرفة واستكشاف العلاقة بين العدد المتسامي e والمتوسطات الاساسية الحسابي والتوافقي والهندسي حيث نتطرق الى الخصائص الرياضية التي تجعل من العدد المتسامي e وسيطا بين هذه المتوسطات، وتبدأ هذه الورقة بتعريف هذه المتوسطات والتعرف على المتباينة التحليلية التي تربط بين هذه المتوسطات ومن تم نقوم بتعريف العدد المتسامي e وبأكثر من صورة وفي نهاية المطاف نقوم بإيجاد تقريبا للعدد المتسامي e مستخدمينا المتباينة التحليلية التي تربط بين والمتوسطات الاساسية الحسابي والتوافقي والهندسي.

الكلمات المفتاحية: المتباينات التحليلية، العدد المتسامي e، تقريب، المتوسطات البسيطة، حسابي، توافقي، هندسي.

Abstract

In this paper, we will explore and understand the relationship between the transcendental number e and the fundamental means: arithmetic, harmonic, and geometric. We will discuss the mathematical properties that make the transcendental number e a mediator between these means. We begin by defining these means and examining the analytical inequality that connects them. Then, we introduce the transcendental number e in multiple forms. Finally, we approximate the value of e using the analytical inequality that links the arithmetic, harmonic, and geometric means.

Keywords: Analytic Inequalities The transcendental number e, Approximation, The sample means, Arithmetic, Harmonic, Geometric.

مقدمة

إن التوسع في نظرية المتباينات بدأ عندما أشار كثير من الباحثين إلى أهمية طرق التقريب حوالي نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين، حيث تم أثبات العديد من المتباينات، وكان لكثير من الباحثين دورا هاما وكبيرا في إظهار التحول في مجال المتباينات وجعلوا منه فرعا مصنفا من فروع الدراسة.

والدور الهام والأساسي الذي لعبته النظرية الحديثة في تواصل ونضوج هذا المجال وتقدمه , حيث صححت كثيرا من المفاهيم الخاطئة , بالإضافة إلى تغيير الكثير من أفكار الدارسين والمهتمين في هذا المجال .وما للعدد المتسامي e من اهمية كبيرة في كثير من المجالات مثل الرياضيات والفيزياء والهندسة والاقتصاد والذي يعتبر اساسيا في دراسة النمو السكاني وكثيرا من الظواهر مثل الفائدة المركبة ويسمى العدد المتسامي e بأساس اللوغريتمات الطبيعية وقيمته التقريبية حوالي $e = 2.718$

وهو عدد غير نسبي وغير دوري حيث تتعرض الدراسة قيد البحث الى تقديم العلاقة بين العدد المتسامي e و المتباينة التحليلية للمتوسطات البسيطة(الحسابي والتوافق والهندسي) من خلال الإجابة على السؤال الآتي: ما هي الطريقة الأنسب والأكثر فعالية لتقريب العدد المتسامي e ؟

أهمية الدراسة:

1. ابراز دور المتباينات التحليلية وأهميتها في حل كثير من المسائل الرياضية.
2. مساعدة الباحثين والمهندسين في اختيار الطريقة المثلى بناءً على طبيعة المسائل الرياضية.
3. الحث على ايجاد تقريبات اكثر دقة للعديد من الثوابت المعروفة.

أهداف الدراسة:

1. تحفيز الباحثين على البحث عن طرق اخرى لإيجاد قيمة تقريبية للعد e .
2. تعزيز فعالية استراتيجيات الحل في التطبيقات العلمية المختلفة.
3. تقديم بعض التوصيات فيما توصلت إليه الدراسة.
4. التذكير بعدم اهمال المتباينات التحليلية والاهتمام بها.

منهجية الدراسة:

دراسة العلاقة بين المتوسطات الأساسية (الحسابي – التوافقي – الهندسي) والعدد e وإمكانية ايجاد قيمة تقريبية للعدد e مستخدمينا المتباينة التحليلية للمتوسطات الحسابي والهندسي والتوافقي.

المبحث الأول: المتوسطات البسيطة (الحسابي - الهندسي – التوافقي)

The sample means (Harmonic – Geometric- Arithmetic)

المتوسط الحسابي (Arithmetic mean) : يعتبر المتوسط او الوسط الحسابي اكثر المقاييس شهرة واكثرها استخداما بل لعله من اهم المقاييس الاحصائية على الاطلاق، وذلك لما يتمتع به من مزايا وخواص، وذلك لدخوله في حساب الكثير من المقاييس الاحصائية الاخرى . [5]

تعريف (1) المتوسط الحسابي $A_n(x)$ للأعداد $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)$ يعرف كالآتي

$$[3] \quad A_n(x) = \frac{n}{x_1+x_2+\cdots\cdots\cdots+x_n}$$

المتوسط الهندسي (Geometric mean) : في حالات كثيرة تكون قيم الظاهرة المدروسة عبارة عن نسب او معادلات، وهي الحالات التي نرغب فيها دراسة معدل تغير ظاهرة ما، وهنا المتوسط الحسابي لا يصف هذه الظاهرة الوصف السليم ولا يعطي اي فكرة صحيحة عن مثل هذه الظواهر لهذا دعت الضرورة ايجاد متوسط اخر يصلح لوصف مثل هذه الظواهر والذي يسمى المتوسط الهندسي. [5]

تعريف : (2) المتوسط الهندسي $G_n(x)$ للأعداد $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)$ يعرف كالآتي

$$[3] \quad G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_n}$$

المتوسط التوافقي (Harmonic mean) :المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم، وهو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار ومتوسط الكثافة السكانية، وغيرها من المتغيرات التي عبارة عن نسبة بين متغيرين . [5]

تعريف : (3) المتوسط التوافقي $H_n(x)$ للأعداد $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)$ يعرف كالآتي

$$[3] \quad H_n(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{n}{x_n}}$$

ملاحظة:

(1) المتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي لا يمكن حسابهما إذا كانت بعض القيم سالبة , فليس هناك معنى لهذه المتوسطات في هذه الحالة.

(2) إذا لم تكن جميع القيم متساوية وإذا لم توجد قيم مساوية للصفر وإذا لم توجد قيم سالبة فإن العلاقة العامة التي تربط بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي هي أن: المتوسط الحسابي > المتوسط الهندسي > المتوسط التوافقي . [5]

متباينة المتوسطات البسيطة (الحسابي - الهندسي – التوافقي)

The inequality of (Harmonic – Geometric- Arithmetic–means)

وتنص على أن المتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد الحقيقية الغير سالبة أكبر من المتوسط الهندسي لنفس الأعداد والمتوسط الهندسي لهذه الأعداد أكبر من المتوسط التوافقي لنفس الأعداد . وعلاوة على ذلك فإن هذه المتوسطات الثلاثة تكون متساوية إذا وإذا فقط كانت كل الأعداد في المجموعة المعطاة متساوية .

نظرية : (1) (متباينة المتوسطات) اذا كانت لدينا الاعداد الحقيقية الموجبة $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$ فان

$$AM = \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n}{n} \quad \text{و} \quad GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n} \quad \text{و} \quad HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{n}{a_n}}$$

تسمى على التوالي المتوسط الحسابي و المتوسط الهندسي و المتوسط التوافقي للأعداد $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$ ويكون لدينا $AM \geq GM \geq HM$ ويتحقق التساوي إذا كانت

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots = a_n$$

الاثبات: أولاً سوف نثبت أن $AM \geq GM$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}$$

نضع $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}}$ لكل $i = 1,2, \cdots\cdots, n$

حيث $x_i > 0$ لكل $i = 1,2, \cdots\cdots, n$ ولدينا $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$

المتباينة $\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}$ تكافئ

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}} \geq n$$

أي أن $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$ عندما $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$

وسنثبت المتباينة $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$ عندما $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ باستخدام الاستنتاج الرياضي

إذا كانت $n = 1$ المتباينة السابقة تصبح متعادلة وإذا كانت $n = 2$ فإن $x_1 x_2 = 1$ وعليه $x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$ ونحصل على $x_1+x_2 \geq 2$ عليه تكون المتباينة

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$ عندما $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ صحيحة وتكون متعادلة إذا كانت $x_1 = x_2 = 1$ وإذا فرضنا أن $n = k$ والأعداد الحقيقية الإختيارية $x_1, x_2, \cdots, x_k$ حيث $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$ ولدينا $x_1+x_2+\cdots+x_k \geq k$ ويتحقق التساوي إذا و إذا فقط كان

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$$

و نضع $n = k+1$ والأعداد الحقيقية الاختيارية $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ حيث $x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1$

وإذا كانت $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ فإن المتباينة

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$ عندما $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ تصبح متساوية والمساواة تتحقق .

والان دعنا نفرض ان لدينا عدد اصغر من 1 . ومن الواضح يوجد عدد اكبر من 1 .

وبدون تعميم يمكن ان نعتبر ان $x_1 < 1$ و $x_2 > 1$ عليه بالنسبة للمتسلسلة $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ التي تحتوي على الحدود التي عددها k يكون لدينا $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{k+1} = 1$ وبناء على فروض الاستنتاج الرياضي لدينا $x_1 x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \geq k$ وتتحقق المساواة اذا كانت

$x_1 x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1$ والان لدينا

$$x_{1+}x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \geq x_1 x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}+1+(x_2-1)(1-x_1) \geq k+1+$$

$$(x_2-1)(1-x_1) \geq k+1$$

وتحقق المساواة في المتباينة السابقة إذا وإذا فقط كانت $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1$ و

$(x_2-1)(1-x_1) = 0$ و أيضا إذا كانت $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ وباستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي نستنتج أن $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$ عندما $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ قد أثبتت.

وباستخدام $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}}$ لكل $i = 1,2,\cdots\cdots,n$ نجد أن

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}} = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}} = \cdots = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}}$$

حيث $a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots = a_n$ عليه نكون أثبتنا المتباينة

$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n}$ وهو المطلوب

والآن سوف نثبت أن $GM \geq HM$ أي أن $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$

بواسطة $AM \geq GM$ ينتج أن

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}}$$

ونجد أن $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$

وتحقق المساواة في المتباينة السابقة إذا وإذا فقط كانت $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots\cdots = \frac{1}{a_n}$ أي أن

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots = a_n$ وهو المطلوب إثباته [1]

المبحث الثاني: العدد e

الدوال التي على الصورة a^x حيث الأس x متغير، تسمى دوال أسية . ما لم يذكر خلاف ذلك، و إذا فرضنا أن $a > 0$ $(0^x$ هومقدار يساوي 0 ,و $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ليس عدد حقيقيا). ونحن بطبيعة الحال نعلم أن a^x تكون معرفة إذا كانت x عدد نسبي، (أي أن $x = \frac{m}{n}$ حيث m و n عددين صحيحين , و $n \neq 0$) ولكن ماذا لو كانت x عدد غير نسبي , مثل $\sqrt{2}$ ؟ وماذا يعني $3^{\sqrt{2}}$ ؟ الفكرة هي أن $\sqrt{2} = 1.414213562 \cdots$ يمكن تقريبه بواسطة العدد النسبي

$1.4142 = \frac{14142}{10000}$, $1.414 = \frac{1414}{1000}$, $1.41 = \frac{141}{100}$, $1.4 = \frac{14}{10}$ و هكذا , وإذا أخذنا بسط أكبر ومقام أكبر في العدد النسبي الذي نقرب به العدد $\sqrt{2}$ فإننا نحصل على المزيد من المنازل العشرية للتقريب للعدد $3^{\sqrt{2}}$ هو الرقم الذي يقترب منه الرقم 3 مرفوعا إلى تلك التقريبات النسبية

$3^{\sqrt{2}} = \lim_{\frac{m}{n}\to\sqrt{2}} 3^{\frac{m}{n}}$ و $\frac{m}{n}$ عدد نسبي.

كل المقادير $3^{\frac{m}{n}}$ معرفة بواسطة النهاية السابقة , والعدد النسبي $\frac{m}{n}$ يؤول إلى $\sqrt{2}$ يمكن أن نبيين أن نهاية المقدار $3^{\frac{m}{n}}$ موجودة

$$3^{1.4} = 3^{\frac{14}{10}} = 4.65553672174608$$
$$3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = 4.70696500171657$$
$$3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.72769503526854$$
$$3^{1.4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.72873393017119$$
$$3^{1.41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878588090861$$
$$3^{1.414213} = 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.72880146624114$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$3^{1.414213562} = 3^{\sqrt{2}} = 4.72880438783742$$

وبطبيعة الحال لا يمكن القيام بذلك بواسطة اليد بسهولة ولكن نحتاج لاستخدام الحاسب الآلي أو الآلة الحاسبة والذي يستخدم اللوغاريتمات لحساب الأسس بصفة عامة .

حيث تنطبق كل قواعد الجبر التي تطبق على الاسس على الدالة الاسية a^x حيث x متغير و $(a > 0)$ ومن بين جميع القيم المحتملة للاساس a فإن القيمة التي تظهر في الرياضيات والعلوم والهندسة هي الاساس (e) أو العدد (e) والمعرف على الصورة $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ حيث القيمة التقريبية لهذا المقدار هي $e = 2.71828182845905\cdots$ (والذي يسمى أيضا عدد أويلر) [2]

المبحث الثالث: تقريب العدد المتسامي(e) باستخدام المتباينة التحليلية $AM \geq GM \geq HM$

سنعرف العدد e عن طريق المتوسطات البسيطة لمتتاليتين لأعداد موجبة $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ و التي لديها

الخواص التالية :.

(1)- $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ أي إن $\{x_n\}$ متتالية متزايدة فعليا .

(2)- $y_1 > y_2 > \cdots > y_n > y_{n+1}$ أي إن $\{y_n\}$ متتالية متناقصة فعليا .

(3)- كل الأعداد في المتتالية $\{x_n\}$ أصغر من الأعداد في المتتالية $\{y_n\}$.

(4)- لأي عدد صحيح موجب N يوجد مناظر M و $M = 4N$ حيث $0 \leq y_n - x_n < \frac{1}{n}$ لكل $n \geq M$.

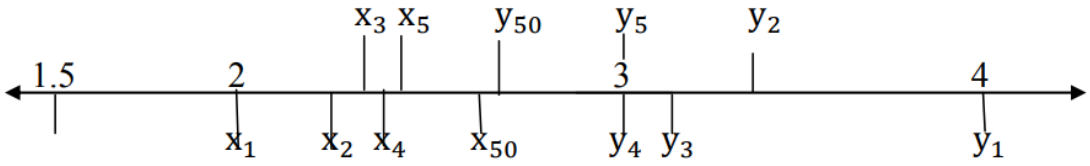
تعريف : (4)

العدد e هو في نفس الوقت اصغر حد علوي في المتتالية $\{x_n\}$ وأكبر حد سفلي في المتتالية $\{y_n\}$ حيث $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, (n = 1,2,\ldots)$.

والقيمة التقريبية لمجموع الأعداد x_n و y_n نضعها في الجدول(1) أدناه ونوضحها بالرسم في الشكل (1)

جدول (1)

n	1	2	3	4	5	...	50
x_n	2	2.25	2.37	2.44	2.49	...	2.69
y_n	4	3.375	3.16	3.05	2.99	...	2.74



الشكل (1)

سوف نثبت الآن أن المتتاليتين $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ المعرفتين أعلاه لديهما الخواص الأربعة التي ذكرناها . ولإثبات الأولى والثانية يكفي أن نثبت أنه لكل عدد صحيح موجب n أن

$x_n < x_{n+1}$ وإن $y_n > y_{n+1}$.

نظرية :. (1) لكل عددين a ,b حيث $a \neq b$ فغن المتباينة $\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+b^n}{n+1}$ تكون صحيحة.

بوضع $a = 1$, $b = 1+\frac{1}{n}$ نحصل على

$$\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \quad .$$

نظرية : (2) إذا كانت $a > b > 0$ و p, q أعداد صحيحة موجبة فإن $a^{p/q} > b^{p/q}$.

من النظرية السابقة نجد أن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ أو $x_n < x_{n+1}$ ومن السهل وبنفس الطريقة إثبات انه إذا كانت $z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ فإن $z_n < z_{n+1}$ ونستخدم هذه النتيجة لإثبات ان $y_n > y_{n+1}$ وبما أن

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$ أي ان

$y_n = z_{n+1}^{-1}$ ومنها $z_{n+1} > z_n$ أو $\frac{1}{z_{n+1}} < \frac{1}{z_n}$ وهذا يعني ان $y_n < y_{n-1}$ حيث $(n = 1,2,3,\ldots)$ أو $y_{n+1} < y_n$ و $(n = 1,2,3,\ldots)$ وهذا إثبات الخاصية الثانية للمتتاليتين $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$. وبقي علينا إثبات الخاصيتين

الاخيرتين ومن السهل أن نرى أن $x_n < y_n$ لكل n حيث $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ و $1 < 1+\frac{1}{n}$ ونريد أن نثبت انه لأي عددين موجبين m, n فإن $x_n < y_m$. فإذا كانت $m = n$ في هذه الحالة نعلم أن ذلك صحيح . وإذا كانت $n > m$ فإن $n = m + k$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k وبإستخدام الخاصية الثانية $x_n < y_n = y_{m+k} < y_m$ أو $x_n < y_m$ وبنفس الطريقة إذا كانت $n < m$ فإن $x_n < y_m$ وبهذا نكون اثبتنا الخاصية الثالثة .

ومهمتنا الأخيرة هي إثبات انه لأي عدد صحيح موجب N فإن $n > 4N$.

$0 < y_n - x_n < \frac{1}{N}$ ولأنه لأي عدد موجب n ,

$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \frac{xn}{n} \geq 0$

ولكن لأي عدد موجب n , $x_n < y_1 = 4$ وباستخدام الخاصية الثالثة

$o < y_n - x_n < \frac{4}{n}$, $(n = 1,2, \dots)$. N معطاة وبذلك لكل $n \geq 4N$ نجد أن . $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ وبالتالي فإن $o < y_n - x_n < \frac{1}{n}$ إذا كانت $n \geq 4N$ وهذا إثبات الخاصية الرابعة .

والشيء الأخير الذي سنثبته هو أن $\{x_n\}$ لديها حد علوي (upper bound) وان $\{y_n\}$ لديها حد سفلي (lower bound) . [4]

نظرية : (3) كل متتالية لأعداد حقيقية لديها حد علوي (upper bound) يكون لديها اصغر حد علوي (least upper bound) و كل متتالية لأعداد حقيقية لديها حد سفلي [4]

(upper bound) يكون لديها اكبر حد سفلي (greatest lower bound) . و إذا كانت x أصغر حد علوي للمتتالية $\{x_n\}$ نكتب $x = l.u.b.x_n$ وإذا كانت y اكبرحد سفلي للمتتالية $\{y_n\}$ نكتب $y = g.l.b.y_n$.

وباستخدام النظرية السابقة فإن $l.u.b.x_n$ موجود وايضا $g.l.b.y_n$ موجود . والخاصية الرابعة تجعل من التعرف (4) تعريفا صحيحا ودقيقا .

المتتاليات التي نستخدمها لتعريف العدد e ليست ملائمة لحساب الكسر العشري للعدد e ,كما رأينا في الجدول السابق والنتائج العددية القادمة .

فإذا فرضنا أن A_n, G_n, H_n هي على التوالي المتوسطات (الحسابي – الهندسي – التوافقي) للمتتاليتين x_n , y_n . فإن المتوسط التوافقي H_n لكل من x_n , y_n يعرف كالأتي .

$H_n = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \left(\frac{x_n^{-1} + y_n^{-1}}{2}\right)^{-1}$ وبحساب بسيط لدينا $x_n < H_n < y_n$

جدول (2)

n	1	2	3	4	...	50
A_n	3	2.813	2.765	2.757	...	2.7186
G_n	2.828	2.747	2.737	2.730	...	2.7183
H_n	2.666	2.700	2.709	2.713	...	2.7187

وللحصول على تدوينات سهلة في الجدول السابق فمن الضروري معرفة $\log_{10} x_{50}$ في ثمان خانات. مع ملاحظة ان كل المتوسطات A_n, G_n, H_n تقترب من (converges to) العدد e ببطى شديد وفي بعض الاحيان نجد ان H_n هو الافضل للتقريب للعدد e .

والصيغة $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}$ التي سنشتقها الآن تعطي تقريبا دقيقا للعدد e . وباستخدام المتسلسلة $\sum_0^n \frac{1}{k!}$ لأعداد صغيرة n , ($0! = 1$) والالة الحاسبة هناك من أستطاع حسابه أن $e = 2.71828182845 \cdots$. ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتا طويلا ويكون حسابها صعبا بالأخص إذا كانت قيم n و!n كبيرة.

وعادة لإثبات أن $e = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}$ ليس من الضروري استخدام الآلة الحاسبة . فقط يكفي أن نثبت النظرية التالية .والتي نستخدم فيها متوسطات بسيطة .

نظرية : (4)

إذا كانت n= $\mathbf{1, 2, 3, \cdots}$ فإن $\left(\mathbf{1+\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{n}} < \sum_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k!}} < \left(\mathbf{1+\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{n+1}}$.

الإثبات :. من السهل إثبات أن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_0^n \frac{1}{k!}$ وللتبسيط نستخدم نظرية ذات الحدين

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\times\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$ وبطبيعة الحال

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-3)}{n^{k+1}}=\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\cdots\times\frac{n-k}{n}\le 1$$ ،

المعاملات $k+1$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

ومن ناحية أخرى المتباينة $\sum_0^n\frac{1}{k!}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,3,\cdots)$,نعلم أن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ تناقصية كلما كانت n تزايدية وبذلك إذا إستطعنا إثبات أن

$\sum_0^n\frac{1}{k!}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1}$ لبعض $r>n$ نكون قد أثبتنا النظرية , نفرض أن n معطاة وبأستخدام نظرية ذات الحدين

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r+1}-\sum_0^n\frac{1}{k!}=$$

$$\left\{\begin{array}{c}(r^{r+1}-1)+\left(\frac{r+1}{r}-1\right)+\left[\frac{(r+1)r}{r^2}-1\right]\frac{1}{2!}+\left[\frac{(r+1)r(r-1)}{r^3}-1\right]\frac{1}{r^3}+\cdots\\ \left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-k+2)}{r^k}-1\right]\frac{1}{k!}+\cdots+\left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-n-2)}{r^n}-1\right]\frac{1}{n!}\end{array}\right\}+\frac{(r+1)r(r-n+1)}{r^{n+1}}\times$$

$$\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{r^{r+1}}$$

وإذا فرضنا أن S هو مجموع الحدود التي عددها n المحصورة بين القوسين { } ففي هذه الحالة علينا أن نثبت أن $|S|<\frac{1}{2(n+1)!}$ وببعض الحسابات البسيطة نحصل على أن

$$\left|\frac{(r+1)r(r-1)\cdots[r-(k-2)]}{r}-1\right|=\frac{a_1r^{k-1}+a_2r^{k+1}+\cdots+a_{k+1}r}{r^k}\ ,\ (k=1,2,3,\cdots,n)$$

والأعداد a_i اعداد صحيحة مستقلة عن r وإذا فرضنا أن M_k هو اكبر الاعداد a_i فإن

$\left|\frac{(r+1)r(r-1)\cdots[r-(k-2)]}{r^k}-1\right|<\frac{M_k\sum_0^{k-2}r^i}{r^{k-1}}=\frac{M_k(r^{k-1}-1)}{r^{k-1}(r-1)}<\frac{M_k}{r-1}$ وبما ان n ثابتة فيكون لدينا عدد ثابت من M_k وهو n وإذا فرضنا أن M هو أكبر هذه الاعداد فإن

$|S|<\frac{1}{2(n+1)!}$, وإذا كانت $r>2nM(n+1)!=N_1$, $|S|<\frac{1}{2(n+1)!}$.

وبنفس الطريقة يمكن أن نثبت أن أول حد خارج القوسين { } في

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r+1}-\sum_0^n\frac{1}{k!}=$$

$$\left\{\begin{array}{c}(r^{r+1}-1)+\left(\frac{r+1}{r}-1\right)+\left[\frac{(r+1)r}{r^2}-1\right]\frac{1}{2!}+\left[\frac{(r+1)r(r-1)}{r^3}-1\right]\frac{1}{r^3}+\\ \cdots\left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-k+2)}{r^k}-1\right]\frac{1}{k!}+\cdots+\left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-n-2)}{r^n}-1\right]\frac{1}{n!}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{(r+1)r(r-n+1)}{r^{n+1}}\times\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{r^{r+1}}$$

هو اكبر من

$\frac{3}{4}\times\frac{1}{(n+1)!}$ وبإختيار r كبيرة بقدر كافي مثل$r>N_2$ وبناء على ذلك إذا كانت $r>N_1+N_2$ فإن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\sum_0^n\frac{1}{k!}$ موجبة، وهو المطلوب. [4]

وبالرجوع للمتباينة $x_n<H_n<y_n$ نجد ان

$H_n\cong\sum_0^n\frac{1}{k!}=e=2.71828182845905\cdots$ وهذا يعني ان المتوسط التوافقي H_n هو الافضل للتقريب للعدد e , وبذلك نكون قد وصلنا الى ما نبحث عنه.

الخاتمة

في هذا البحث، قمنا بتقريب العدد المتسامي (e) باستخدام المتباينة التحليلية للمتوسطات الحسابي والهندسي والتوافقي .حيث تمكنا من خلال تحليل العلاقة بين هذه المتوسطات وتطبيقها على متتاليات محددة من الأعداد الحقيقية من التوصل إلى تقديرات فعالة لقيمة(e) ، مع تحليل دقة هذه التقديرات ومقارنتها بالطرق التقليدية .أظهرت النتائج أن استخدام المتباينات التحليلية يوفر منهجًا قويًّا لفهم سلوك العدد المتسامي (e) وتقريبه بطريقة تعكس الروابط العميقة بين النظرية التحليلية للأعداد والهندسة.

كما تم دراسة مدى تحسين التقريب عبر اختيار متتاليات ملائمة، مما يبرز دور المتباينة في تحسين الحدود العليا والدنيا للتقريبات .تبين أن هذه الطريقة لا تقدم نتائج دقيقة فحسب، بل توضح أيضًا الجمال الرياضي الكامن في توظيف المفاهيم الأساسية مثل المتوسطات في حل مشكلات متقدمة. وبذلك نكون قد أجبنا على السؤال الذي قمنا بطرحه في مقدمة البحث حول الطريقة الأنسب والأكثر فعالية لتقريب العدد المتسامي e .

في الختام، يفتح هذا البحث آفاقًا جديدة لاستكشاف تطبيقات أوسع للمتباينات التحليلية في تقريب الثوابت الرياضية الأخرى، مع إمكانية تعميم النتائج على سياقات رياضية إضافية .يمكن أن تشكل هذه الدراسة نقطة انطلاق لمزيد من البحث في دمج الأدوات التحليلية والهندسية لتحسين الفهم الحسابي والجبري للأعداد المتسامية.

توصيات الدراسة:

أولاً: اختيار الطريقة المناسبة بناءً على طبيعة المسائل الرياضية:

يوصى باستخدام المتباينات التحليلية وذلك لقدرتها على تقديم حلول فعالة ومميزة لكثير من المسائل الرياضية وخاصة مسائل التقريب.

ثانياً: النظر في الوقت المستغرق لحل المسائل:

1- يوصى باستخدام الطرق الافضل للتقريب والتي تستغرق وقتا أقصر من غيرها من الطرق الاخرى.
2- في المسائل التي لا يكون الزمن فيها معيارًا مهمًا يمكن الاعتماد على طرق تقليدية اخرى والتي قد تتطلب وقتًا أطول لكنها تقدم حلولاً واضحة وبسيطة.

ثالثاً: تبسيط العمليات الحسابية:

1- يوصى باستخدام المتباينات التحليلية لتبسيط العمليات الحسابية المعقدة.
2- يوصى بالبحث عن طرق اخرى لتقريب الثوابت المشهورة مثل العدد π وغيره من الثوابت المستعملة في الكثير من المجالات العلمية.

رابعاً: تطوير أدوات تعليمية لشرح المتباينات التحليلية:

يوصى بتطوير أدوات تعليمية أو مواد تدريسية تساعد الطلاب والباحثين على فهم واستخدام المتباينات التحليلية بشكل أفضل، لا سيما في المسائل المعقدة التي قد تبدو غير قابلة للحل بالطرق التقليدية.

أخيراً: مواصلة البحث في تطوير طرق هجينة:

يوصى بمتابعة البحث لتطوير طرق هجينة لاستخدام المتباينات التحليلية بحيث يمكن استخدامها لتوسيع نطاق الحلول المتاحة لمجموعة أوسع من المسائل الرياضية وخاصة التقريب.

References - المراجع

[1] Zdravko Cvetkovski (Inequalities .Theorems, Techniques and selected problems) Springer 2012

[2] Michael Corral (Elementary Calculus) Schoolcraft College (Version 1.3)

[3] D.s.Mitrinovic , Incooperation with P.M. Vasic (Analytic Inequalities) Springer-Verlag Berlin . Heidelberg . New York 1970.

[4] Nicholas D. Kazarinoff . The University of Michigan(Analytic Inequalities). HOLT, RINEHART AND WINSTON New York . Library of Congress Catalog Card Number : 61-654424841-0110.

[5] (الإحصاء والاحتمالات للعلوم والهندسة) د.عبدا لله زيدان (الطبعة الثانية) .

[6] (كتاب بيداغوجي في الإحصاء 1) د. عبدالحليم الحمرة . 2022.