African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 4, Issue 4, 2025
Page No: 722-731
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index
ISI 2025: 1.126 **SJIFactor 2024: 6.752** **معامل التأثير العربي: 1.62**

Developing a dynamic mathematical model to analyze the impact of technological progress on productivity using differential equations and the Cobb-Douglas production function

Hend B. Khalifa [1], Hend A. Eissa[*2]
[1] General department, College of Computer Technology, Tripoli, Libya
[2] Electronic Technology College of Tripoli- Information Technology, Alenetaq University, Tripoli, Libya

تطوير نموذج رياضي ديناميكي لتحليل تأثير التطور التقني على الإنتاجية باستخدام المعادلات التفاضلية ودالة كوب-دوغلاس

هند بلعيد خليفة [1]، هند عبد القادر عيسى [2*]
[1] القسم العام، كلية تقنية الحاسوب، طرابلس، ليبيا
[2] كلية التقنية الإلكترونية طرابلس - تقنية المعلومات، جامعة الانعتاق، طرابلس، ليبيا

[*]Corresponding author: : haseissa@cet.edu.ly

Received: September 29, 2025	Accepted: December 09, 2025	Published: December 18, 2025

Abstract
The study formulates an advanced mathematical model based on a system of nonlinear differential equations to investigate the dynamic interdependencies among productivity (Y), capital (K), and labor (L). Anchored in the Cobb–Douglas production function, the model extends its classical formulation by incorporating temporal dynamics and technological progress as an endogenous factor. It explicitly accounts for capital accumulation through investment and depreciation mechanisms, as well as variations in labor growth rates over time. Analytical exploration of the system identifies the steady-state equilibrium conditions under which capital variation approaches zero, allowing for the determination of long-term sustainable productivity levels. Furthermore, numerical simulations employing hypothetical and empirical parameters are conducted to assess the model's sensitivity to changes in technological efficiency, investment ratios, and depreciation rates. The results reveal that technological advancement and innovation act as stabilizing forces that enhance system convergence and improve equilibrium productivity. Hence, the proposed model provides a rigorous quantitative framework for evaluating the dynamic effects of technological evolution on macroeconomic performance and long-run growth stability.

Keywords: Productivity, Capital, Differential Equations, Cobb-Douglas Function, Economic Growth, , Technology Economic Policies.

الملخص
يهدف هذا البحث إلى تطوير نموذج رياضي دقيق وشامل يهدف إلى تحليل العلاقة الديناميكية بين الإنتاجية (Y)، رأس المال (K)، والعمالة (L) باستخدام المعادلات التفاضلية. يعتمد النموذج على دالة إنتاج كوب- دوغلاس، التي تُعد إطارًا نظريًا راسخًا في الاقتصاد، مع دمج ديناميكيات زمنية لدراسة التغيرات في رأس المال والعمالة على المدى الطويل. تم تصميم النموذج ليأخذ في الاعتبار عوامل مثل الاستثمار في رأس المال، معدل إهلاك رأس المال، نمو العمالة، وتطور التكنولوجيا. تم تحليل النموذج رياضيًا لاستخلاص حالة التوازن (steady state)، حيث تصبح التغيرات في رأس المال صفرية، مما يسمح بتقييم مستويات الإنتاجية المستدامة. بالإضافة إلى التحليل النظري، أُجري تحليل عددي باستخدام معايير افتراضية لمحاكاة سيناريوهات اقتصادية مختلفة، مثل زيادة نسبة الاستثمار أو تقليل معدل الإهلاك. كما تضمن البحث دراسات حالة تطبيقية على اقتصادات متنوعة (متقدمة مثل اليابان، نامية مثل مصر، وناشئة مثل الهند) لتقييم تأثير السياسات الاقتصادية على الإنتاجية في سياقات مختلفة. أظهرت النتائج أن زيادة الاستثمار في رأس المال، تحسين كفاءة العمالة من خلال التعليم

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

والتدريب، تقليل معدل إهلاك رأس المال، وتعزيز الابتكار التكنولوجي هي استراتيجيات حاسمة لتعزيز الإنتاجية. يقدم البحث رؤى عملية لصناع القرار، حيث يوفر إطارًا تحليليًا مرنًا يمكن تكييفه مع احتياجات الاقتصادات المختلفة. كما يقترح البحث توصيات سياسية تشمل زيادة الإنفاق على البنية التحتية، تحسين جودة التعليم، وتطوير سياسات تدعم الابتكار لتحقيق نمو اقتصادي مستدام. يُعد هذا النموذج أداة قيمة لفهم العوامل المؤثرة على الإنتاجية ودعم التخطيط الاقتصادي في السياقات المحلية والعالمية.

الكلمات المفتاحية: الإنتاجية، رأس المال، العمالة، المعادلات التفاضلية، دالة كوب-دوغلاس، النمو الاقتصادي، التقنيات الحديثة، التنمية المستدامة.

المقدمة

تُعد العلاقة بين الإنتاجية، رأس المال، والعمالة من أبرز المحاور التي انشغل بها الاقتصاديون منذ نشأة الفكر الاقتصادي الكلاسيكي وحتى يومنا هذا، لما لها من تأثير مباشر في تفسير النمو الاقتصادي وتطور المجتمعات. فالإنتاجية تعكس مدى الكفاءة في استخدام الموارد المتاحة لتحقيق أقصى قدر ممكن من الناتج، بينما يمثل رأس المال الوسائل المادية والتقنية المستثمرة في العملية الإنتاجية، وتشكل العمالة المورد البشري الذي يتكامل مع رأس المال لتحقيق أهداف الاقتصاد. وقد سعت العديد من النماذج الاقتصادية إلى دراسة هذه العلاقة، من أبرزها نموذج سولو الذي اعتمد على دالة كوب-دوغلاس للإنتاج والتي تربط الناتج الكلي بعنصري العمل ورأس المال، مع إضافة عنصر الإنتاجية الكلية الذي يُفترض تطوره خارج النموذج بمعزل عن تأثيرات المتغيرات الأخرى .

إلا أن هذه الفرضية بحد ذاتها مثّلت نقطة ضعف في العديد من الدراسات الاقتصادية، إذ إنها تُغفل الترابط الحقيقي والديناميكي بين عناصر الإنتاج والإنتاجية، وهو ما يدفع إلى تبني مقاربات رياضية أكثر تطورًا تحاكي الواقع الاقتصادي بدقة أعلى. من هنا تنبع أهمية هذه الدراسة، التي تهدف إلى بناء نموذج رياضي قائم على المعادلات التفاضلية العادية لتحليل كيفية تفاعل المتغيرات الثلاثة: الإنتاجية، رأس المال، والعمالة، بصورة ديناميكية تتغير مع الزمن وتستجيب لمجموعة من العوامل والسياسات. وتتيح هذه النماذج التفاضلية تمثيل النظام الاقتصادي بطريقة تعكس التغيرات المستمرة في مكوناته، عبر دراسة معدل تغير كل متغير نسبةً إلى الزمن، مما يسمح بتحليل استقراره وتحديد تأثير العوامل المؤثرة فيه في الأجلين القصير والطويل. وتتمثل إحدى المزايا الرئيسية لهذا النوع من النمذجة في إمكانية التعامل مع العلاقات غير الخطية بين المتغيرات، الأمر الذي يصعب تحقيقه باستخدام النماذج الخطية أو الثابتة التقليدية. كما أن هذه النماذج تتيح أيضًا دراسة السيناريوهات المستقبلية، مثل استجابة النظام الاقتصادي لزيادة الاستثمار، أو تأثير انخفاض معدل نمو العمالة، أو نتائج سياسات تهدف إلى تحسين الإنتاجية من خلال الابتكار أو التعليم.(Khurazovna, 2025)

ويُبنى النموذج المقترح في هذه الدراسة على ثلاث معادلات تفاضلية تمثل كل واحدة منها سلوك أحد المتغيرات الثلاثة عبر الزمن. فالمعادلة الأولى تصف تغير رأس المال كنتيجة للاستهلاك والاستثمار، مع احتساب نسبة الإهلاك، بينما تمثل المعادلة الثانية تطور العمالة مع الزمن، سواء بفعل النمو السكاني الطبيعي أو نتيجة السياسات الاقتصادية والاجتماعية المؤثرة في سوق العمل. أما المعادلة الثالثة، فهي تمثل تطور الإنتاجية الكلية بوصفها متغيرًا داخليًا في النموذج، يمكن أن يتأثر بكل من رأس المال والعمالة، فضلًا عن متغيرات أخرى يمكن إضافتها لاحقًا كجودة التعليم أو مستوى البحث والتطوير. ويُعد اعتبار الإنتاجية متغيرًا داخليًا من أهم ما يميز هذا النموذج، إذ إنه يفتح المجال لفهم أعمق للعلاقة المتبادلة بينها وبين بقية العناصر الإنتاجية، وبالتالي الخروج بتحليل أكثر شمولًا لمسار النمو الاقتصادي. كما سيتم في هذا البحث استخدام الأدوات الرياضية اللازمة لتحليل خصائص النموذج، مثل دراسة نقاط التوازن، وتحليل استقرار النظام عند هذه النقاط، عبر حساب المشتقات الجزئية وتحليل المصفوفة اليعقوبية لتحديد طبيعة الحلول الممكنة للنظام، ومعرفة ما إذا كانت تؤدي إلى استقرار طويل الأمد أم إلى تقلبات أو حالات عدم استقرار. وسيتم أيضًا توظيف الطرق العددية عندما يصعب الحصول على حلول تحليلية صريحة، وذلك باستخدام البرمجيات الرياضية الحديثة التي تسمح بمحاكاة النظام وتحليل النتائج بدقة. وتمثل هذه المحاكاة أداة فعالة لفهم تأثير التغير في المعلمات الاقتصادية مثل معدل الادخار، أو نمو السكان، أو كفاءة التعليم، على تطور الناتج والإنتاجية ورأس المال في الأجل الطويل. كما يمكن استخدام النموذج لدراسة الفرق بين الاقتصادات النامية والمتقدمة من حيث طبيعة العلاقة بين هذه المتغيرات، ومدى قدرة كل اقتصاد على تحقيق استقرار ديناميكي في ظل صدمات خارجية أو تغييرات هيكلية.

ولا بد من الإشارة إلى أن النمذجة الرياضية في الاقتصاد ليست مجرد تجريد نظري، بل إنها تمثل أداة تحليلية قوية تساعد في اتخاذ القرارات الاقتصادية ورسم السياسات العامة. فالنموذج المقترح في هذه الدراسة يمكن أن يستخدمه صانعو القرار لتقدير أثر زيادة الإنفاق على البنية التحتية أو التعليم على مسار الإنتاجية، أو تحليل النتائج المحتملة للتغير في معدلات الاستثمار أو الضرائب على رأس المال، كما يمكن أن يسهم في فهم تبعات الهجرة أو التغيرات الديموغرافية على سوق العمل، وتقدير حجم التحديات التي قد تواجه الاقتصاد مستقبلاً. وتمثل هذه الأبعاد التطبيقية للموديل عنصرًا جوهريًا في قيمته العلمية والعملية، إذ إنه يمكن تكييفه ليلائم ظروف أي اقتصاد معين بمجرد تعديل المعلمات والإدخالات، سواء لاقتصاد ناشئ أو متقدم. ونظرًا إلى أن العديد من الاقتصادات تعاني من تباطؤ في الإنتاجية، أو اختلالات بين رأس المال والعمالة، فإن النموذج المقترح يمثل أداة مهمة لفهم الأسباب الجذرية لهذه الاختلالات، ومن ثم العمل على معالجتها وفق أسس علمية دقيقة.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

وبذلك، تسعى هذه الدراسة إلى تقديم إضافة نوعية في مجال الاقتصاد الرياضي، من خلال تطوير نموذج تفاضلي متكامل يعكس العلاقة الديناميكية بين أهم ثلاثية إنتاجية في الاقتصاد، ويتيح تحليلًا معمقًا واستشرافًا دقيقًا لمسارات النمو المستقبلية.

مشكلة البحث

تتمثل المشكلة البحثية في التحديات التي تواجه الاقتصادات، خاصة النامية، في تحسين الإنتاجية في ظل قيود الموارد المحدودة والتغيرات الديناميكية في رأس المال والعمالة. غالبًا ما تعاني الاقتصادات من انخفاض كفاءة تخصيص الموارد، ارتفاع معدلات إهلاك رأس المال بسبب ضعف البنية التحتية، ونقص الكفاءات في القوى العاملة نتيجة محدودية التعليم والتدريب. هذه العوامل تؤدي إلى تباطؤ النمو الاقتصادي وتقليل القدرة على تحقيق تنمية مستدامة. على الرغم من وجود نماذج اقتصادية تقليدية مثل دالة كوب-دوغلاس، إلا أن هذه النماذج غالبًا ما تفتقر إلى دمج الديناميكيات الزمنية التي تعكس التغيرات في رأس المال والعمالة على المدى الطويل. كما أن العديد من الدراسات السابقة ركزت على الاقتصادات المتقدمة، مما يحد من إمكانية تطبيقها على الاقتصادات النامية التي تواجه تحديات مختلفة. بالإضافة إلى ذلك، هناك نقص في الأدوات التحليلية التي تمكن صانعي القرار من تقييم تأثير السياسات الاقتصادية، مثل زيادة الاستثمار أو تحسين التعليم، على الإنتاجية بدقة. تُبرز هذه المشكلة الحاجة إلى نموذج رياضي ديناميكي يعتمد على المعادلات التفاضلية لتحليل العلاقة بين الإنتاجية، رأس المال، والعمالة، مع توفير رؤى عملية لدعم التخطيط الاقتصادي.

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تحقيق الأهداف التالية:

- تطوير نموذج يعتمد على المعادلات التفاضلية ودالة كوب-دوغلاس لتحليل العلاقة بين الإنتاجية، رأس المال، والعمالة على المدى الطويل.
- استخلاص مستويات رأس المال والإنتاجية في حالة التوازن لفهم الاستدامة الاقتصادية.
- محاكاة سيناريوهات اقتصادية مختلفة لتقييم تأثير عوامل مثل الاستثمار، الإهلاك، ونمو العمالة على الإنتاجية.
- تحليل تأثير السياسات الاقتصادية في اقتصادات متنوعة (متقدمة، نامية، وناشئة) لضمان مرونة النموذج، ومن تم اقتراح استراتيجيات عملية لتحسين الإنتاجية، مثل زيادة الإنفاق على البنية التحتية وتحسين التعليم.

أهمية البحث

تنبع أهمية هذا البحث من قدرته على الجمع بين الأبعاد النظرية والتطبيقية في تحليل العلاقة بين الإنتاجية، رأس المال، والعمالة، ضمن إطار رياضي ديناميكي متقدم. فمن الناحية النظرية، يقدّم البحث مساهمة مهمة في الأدبيات الاقتصادية من خلال تطوير نموذج يستخدم المعادلات التفاضلية لفهم التفاعلات المعقدة بين مكونات العملية الإنتاجية. ويتميّز هذا النموذج بدمجه الديناميكيات الزمنية، مما يتيح فهماً أعمق للتغيرات المستمرة التي تطرأ على الاقتصاد عبر الزمن، متجاوزًا بذلك القيود التقليدية للنماذج الاقتصادية الثابتة التي لا تأخذ الزمن كعامل مؤثر في التحليل.

أما من الناحية العملية، فإن البحث يشكل أداة تحليلية مهمة لصناع السياسات الاقتصادية، حيث يمكن استخدام النموذج لتقييم آثار التدخلات الحكومية، مثل زيادة الإنفاق على البنية التحتية، أو تطوير نظم التعليم والتدريب المهني، على مستوى الإنتاجية الوطنية. ويكتسب هذا الجانب أهمية خاصة في الاقتصادات النامية التي غالبًا ما تواجه تحديات تتعلق بندرة الموارد وضرورة توجيهها نحو قطاعات تحقق أقصى عائد ممكن. من خلال هذا النموذج، يصبح بالإمكان اختبار سيناريوهات مختلفة ووضع تقديرات كمية لتأثير القرارات الاقتصادية قبل تنفيذها فعليًا.

كما تتجلى أهمية البحث في مرونة النموذج المقترح، حيث يمكن تطبيقه على أنواع مختلفة من الاقتصادات، سواء كانت متقدمة أو نامية أو ناشئة. وتتيح هذه المرونة استخدام النموذج في دراسات مقارنة بين الدول أو في تقييم السياسات المطبقة في سياقات اقتصادية متنوعة. وبذلك، يتحول النموذج إلى أداة فعالة في التخطيط الاقتصادي متوسط وطويل الأجل، تُستخدم لتوجيه الاستثمارات وتحسين تخصيص الموارد بما يتناسب مع الأهداف الوطنية.

علاوة على ذلك، يساهم هذا البحث في دعم مساعي تحقيق التنمية المستدامة، من خلال تقديم توصيات عملية تستند إلى نتائج رياضية دقيقة. وتشمل هذه التوصيات أهمية تحسين كفاءة رأس المال البشري عبر التعليم والتدريب، وتشجيع الابتكار التكنولوجي، وخفض معدلات إهلاك رأس المال من خلال سياسات صيانة وتجديد فعالة. وتُعد هذه العناصر من الدعائم الأساسية لتحقيق نمو اقتصادي مستدام وشامل يلبي احتياجات الحاضر دون المساس بقدرات الأجيال القادمة.

أخيرًا، يملأ البحث فجوة قائمة في الدراسات الاقتصادية، حيث تفتقر العديد من النماذج الحالية إلى معالجة ديناميكية العلاقة بين عناصر الإنتاج في سياق الاقتصادات النامية تحديدًا. ومن خلال تقديم نموذج رياضي ديناميكي يراعي الخصوصيات الاقتصادية والهيكلية لهذه البلدان، يقدّم البحث إطارًا جديدًا للباحثين والممارسين على حد سواء، يمكن البناء عليه وتطويره في دراسات مستقبلية تهدف إلى فهم أعمق لعوامل النمو الاقتصادي في البيئات الأقل استقرارًا والأكثر تحديًا.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

تساؤلات البحث

يسعى البحث إلى الإجابة على التساؤلات التالية:

- كيف يمكن نمذجة العلاقة بين الإنتاجية، رأس المال، والعمالة باستخدام المعادلات التفاضلية بشكل ديناميكي ودقيق؟
- ما هي مستويات رأس المال والإنتاجية في حالة التوازن، وكيف تتأثر بالتغيرات في معدلات الاستثمار، الإهلاك، ونمو العمالة؟
- كيف تؤثر السياسات الاقتصادية، مثل زيادة الإنفاق على البنية التحتية أو تحسين التعليم، على الإنتاجية في اقتصادات مختلفة (متقدمة، نامية، ناشئة)؟
- ما هي الاستراتيجيات الأكثر فعالية لتحسين الإنتاجية في الاقتصادات النامية، مع الأخذ في الاعتبار قيود الموارد؟

"دالة كوب دوجلاس: دالة كوب دوجلاس: نظرة رياضية للإنتاج"

تُعد دالة الإنتاج كوب-دوغلاس من المفاهيم الأساسية في علم الاقتصاد، حيث تصف كيفية تحويل المدخلات إلى مخرجات ضمن العملية الإنتاجية. وقد سُمّيت نسبةً إلى الاقتصاديين تشارلز كوب وبول دوغلاس اللذين طوّرا هذا النموذج في أوائل القرن العشرين، ويُعرف ببساطته ومرونته وقابليته للتطبيق في مختلف القطاعات الاقتصادية. تفترض الدالة أن الناتج الكلي (Q) يتحدد من خلال مستويي رأس المال (K) والعمالة (L)، مع إدخال عامل يعكس الكفاءة أو التقدم التكنولوجي (A)، ومعاملين مرنين (α وβ) يقيسان مدى استجابة الناتج لتغيرات المدخلات. ويُعبّر عن الدالة بالشكل:

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

يُتيح هذا النموذج فهماً عميقاً لمفاهيم اقتصادية مثل العوائد المتناقصة والعوائد إلى الحجم. فمن منظور اقتصادي، تساعد الدالة في تحليل مساهمة رأس المال والعمالة في النمو الاقتصادي، أما في مجال الأعمال، فهي توفّر أداة لتحديد التوليفة المثلى من المدخلات وتحقيق الكفاءة الإنتاجية. كما أن شكلها اللوغاريتمي يجعلها سهلة الاستخدام في التحليل الإحصائي والنمذجة التطبيقية. يمثل العامل A مستوى التكنولوجيا والكفاءة الكلية، بينما تشير α وβ إلى درجة تأثير كل من رأس المال والعمالة على الناتج. وغالبًا ما يُفترض أن $\alpha + \beta = 1$، ما يشير إلى عوائد ثابتة للقياس، في حين أن الانحراف عن هذا المجموع يدل على وجود عوائد متزايدة أو متناقصة. وعلى الرغم من فعالية هذا النموذج، إلا أنه لا يخلو من القيود، كافتراضه لنسبة إحلال ثابتة بين المدخلات. ومع ذلك، يظل من النماذج المهمة في التحليل الاقتصادي، ويمكن توسيعه ليشمل مدخلات أخرى مثل الموارد الطبيعية. وتبرز تطبيقاته في قطاعات مثل الزراعة، حيث يُستخدم لتحليل العلاقة بين حجم العمالة والمعدات الزراعية وإنتاجية المحاصيل، أو في الصناعة، لتحسين العلاقة بين اليد العاملة والآلات لزيادة الإنتاج. في المجمل، توفر دالة كوب-دوغلاس إطارًا رياضيًا واضحًا لفهم ديناميكيات الإنتاج، مما يجعلها أداة مفيدة للباحثين وصناع القرار في تخطيط السياسات والاستراتيجيات الاقتصادية.

حدود الدراسة:

تتناول هذه الدراسة أثر توسع أنشطة الشمول المالي على مؤشرات السلامة المالية للمؤسسات المالية والمصرفية ومن أجل تحقيق التحليل المحاسبي الدقيق، تم تحديد الفترة الزمنية من 2015 إلى 2024، تم اختيار هذه الفترة لأنها تشمل مرحلة تطبيق معايير الإبلاغ المالي الدولية (IFRS 7وIFRS 9)، والتي لها تأثير مباشر على الإفصاح عن المخاطر المالية، كما تغطي فترة كافية لملاحظة تطورات الشمول المالي، بما في ذلك برامج التمويل الرقمي والخدمات المصرفية الحديثة، كما تتيح هذه الفترة إمكانية دراسة أثر الأحداث الاقتصادية والأزمات المالية، مثل جائحة كوفيد-19، على مؤشرات السلامة المالية للمؤسسات المختلفة.

أما فيما يتعلق بالمؤسسات محل الدراسة فقد تم اختيار البنوك التجارية الكبرى، مثل بنك مسقط وبنك عمانتل، بالإضافة إلى المؤسسات المالية غير المصرفية بما في ذلك شركات التمويل الأصغر والمؤسسات المانحة للائتمان الرقمي تمثل هذه المؤسسات نطاقًا واسعًا من الخدمات المالية التي تغطي الشمول المالي، وتوفر بيانات مالية دقيقة يمكن الاعتماد عليها في التحليل المحاسبي التطبيقي، كما تسمح هذه التشكيلة بمقارنة أثر التوسع في الشمول المالي بين البنوك التقليدية والمؤسسات غير المصرفية، مما يعزز دقة النتائج ويتيح فهمًا أعمق للعلاقة بين توسع الخدمات المالية ومستوى المخاطر المالية.

المنهجية

يعتمد هذا البحث على منهجية متكاملة تجمع بين الصياغة الرياضية الدقيقة، التحليل العددي، وتطبيقات واقعية من خلال دراسات حالة، وذلك بغرض بناء نموذج اقتصادي ديناميكي يعكس العلاقات المعقدة بين الإنتاجية(Y) ، رأس المال(K) ، والعمالة .(L) يشمل التحليل مراحل متعددة تبدأ بوضع نموذج رياضي يعتمد على معادلات تفاضلية مشتقة من دالة إنتاج Cobb-Douglas، ثم إجراء تحليل عددي باستخدام قيم افتراضية واقعية، وأخيرًا اختبار النموذج من خلال دراسات حالة على اقتصادات متنوعة.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

في الخطوة الأولى، تم الاعتماد على دالة الإنتاج Cobb-Douglas المعروفة بصيغتها الديناميكية الزمنية التالية (Zou, 2023):

$$Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

حيث:

Y(t): الإنتاجية الكلية في الزمن

A(t): مستوى التكنولوجيا أو الكفاءة الكلية

K(t): رأس المال في الزمن

L(t): حجم العمالة في الزمن

α: معامل مرونة الناتج بالنسبة لرأس المال، و 1 –α يمثل مرونة الناتج بالنسبة للعمالة

ولصياغة نموذج ديناميكي يعكس تطور كل من رأس المال، العمالة، والتكنولوجيا عبر الزمن، تم استخدام نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى على النحو التالي (tettehraphaelkobby, 2025):

$$\frac{dK(t)}{dt} = s \cdot A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha} - \delta \cdot K(t)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = g \cdot A(t)$$

تمثل هذه المعادلات التغير في رأس المال، والعمالة، والتكنولوجيا، على التوالي، مع الأخذ بعين الاعتبار العوامل التالية:

s: نسبة الادخار المخصصة للاستثمار في رأس المال

δ: معدل اهتلاك رأس المال

n: معدل نمو السكان (العمالة)

g: معدل النمو التكنولوجي

وللوصول إلى حالة التوازن الاقتصادي (Steady-State)، تم تحديد الشرط الذي يصبح فيه معدل تغير رأس المال صفرًا $\frac{dK}{dt} = 0$ من هذا الشرط تم اشتقاق حالة التوازن لرأس المال على النحو التالي:

$$K^* = \left(\frac{L.A.S^{\alpha-1}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

تمثل هذه المعادلة مستوى رأس المال الذي يحقق الاستقرار في النظام الاقتصادي، حيث لا يحدث تغيير في رأس المال بمرور الزمن، مما يعني أن النظام بلغ حالة نمو مستدام.

في المرحلة الثانية من البحث، تم إجراء تحليل عددي لمحاكاة سلوك النموذج باستخدام مجموعة من القيم الافتراضية المدروسة، والتي تم اختيارها لتعكس ظروفًا اقتصادية شائعة ومقبولة في الأدبيات الاقتصادية. وتشمل المعايير الأساسية ما يلي.

- A=1: يعكس حالة تكنولوجية ابتدائية معتدلة
- α=0.3 مرونة رأس المال
- s=0.2: نسبة الادخار(20%)
- δ=0.05 معدل إهلاك رأس المال(5%)
- n=0.02: معدل نمو العمالة(2%)
- g=0.01: معدل التقدم التكنولوجي(1%)

تمت محاكاة النموذج رياضيًا باستخدام أدوات تحليل رقمي، مثل طرق Runge-Kutta لحل المعادلات التفاضلية عدديًا، وتحليل سلوك النموذج عبر الزمن تحت تأثير تغير أحد العوامل. على سبيل المثال، أظهرت نتائج النموذج أن زيادة نسبة الادخار s من 0.2 إلى 0.3 تؤدي إلى ارتفاع في الإنتاجية بنسبة 15% على المدى الطويل، نتيجة زيادة الاستثمار في رأس المال. وتم توثيق هذه النتائج من خلال جداول ورسوم بيانية تُظهر تطور المتغيرات بمرور الزمن، مثل نمو K(t)، Y(t)، وA(t). تُظهر الرسوم البيانية أيضًا أن تأثير التكنولوجيا المتقدمة يظهر بشكل تدريجي لكنه مؤثر في المدى الطويل، حيث يؤدي ارتفاع معدل النمو التكنولوجي g إلى تسريع معدلات النمو في الإنتاجية، حتى في حالات ثبات أو انخفاض نمو العمالة.

المرحلة الأخيرة من المنهجية شملت اختبار النموذج عبر دراسات حالة تطبيقية لثلاثة نماذج اقتصادية مختلفة: اقتصاد متقدم (اليابان)، اقتصاد ناشئ (مصر)، واقتصاد نامٍ (الهند). أُجري التحليل باستخدام بيانات حقيقية متاحة لتقييم مدى ملاءمة

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

النموذج في تفسير التفاوت في مستويات الإنتاجية والسياسات الاقتصادية بين هذه الدول، كما سعى لتحديد أثر السياسات المالية والتعليمية والبنية التحتية على ديناميكيات الإنتاج في كل حالة.
تؤكد هذه المنهجية أن النموذج المقترح لا يوفر فقط إطارًا نظريًا، بل هو أداة عملية قابلة للتطبيق والتحليل في سياقات اقتصادية متعددة، مما يعزز من القيمة العلمية والتطبيقية للبحث.

معادلة التفاضلية:

يمكن افتراض أن معدل نمو التقنية A(t) يتحدد بالمعادلة التفاضلية:

$$^{\gamma}A(t) \cdot {}^{\beta}R(t) \cdot {}^{\alpha}H(t) \cdot \phi = \frac{dA(t)}{dt}$$

حيث:

- A(t): مستوى التقنية في الوقت t
- H(t): الاستثمار في رأس المال البشري (العمالة الماهرة)
- R(t): الإنفاق على البحث والتطوير(R&D)
- Φ: معامل إنتاجية التقنية، يحدد كفاءة التحويل من رأس المال البشري والبحث إلى التقنية
- α,β,γ: مرونات (Elasticities) تحدد تأثير كل عامل على نمو التقنية

ثبات استقرار نقطة التوازن(Stability Proof)

لتقييم استقرار نقطة التوازن (K,A)(K^, A^)(K,A) في نموذج النمو الاقتصادي مع التقدم التقني الداخلي، يجب استخدام أدوات التحليل الرياضي القياسي مثل تحليل القيم الذاتية (Eigenvalue Analysis) أو المخططات الطورية (Phase Diagrams).

1. تعريف النقطة الثابتة: نقطة التوازن تتحقق عندما تكون مشتقات المتغيرات الرئيسية مساوية للصفر، أي:

$$\mathbf{0= A \ , 0= K}$$

حيث Kرأس المال و Aمستوى التقنية.

يتم خطياً تقريب النظام حول النقطة الثابتة باستخدام مصفوفة الجاكوبين:(Jacobian Matrix)

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{K}\partial}{A\partial} & \frac{\dot{K}\partial}{K\partial} \\ \frac{\dot{A}\partial}{A\partial} & \frac{\dot{A}\partial}{K\partial} \end{bmatrix}_{(^*K^*,A)} = J$$

ثم نحسب القيم الذاتية λ1,λ2 للمصفوفة:

- **معيار الاستقرار:**
- إذا كانت جميع القيم الذاتية سالبة (λi<0)، فإن النظام مستقر، ويعود تلقائيًا إلى نقطة التوازن بعد أي صدمة صغيرة.
- إذا كانت أي قيمة ذاتية موجبة(λi>0) ، فإن النقطة غير مستقرة، والنظام قد ينحرف عن التوازن.
- **توضيح اقتصادي:**

هذا الإثبات يضمن أن النموذج يعكس سلوكًا اقتصاديًا مستقرًا، حيث تعود مؤشرات السلامة المالية إلى مستواها الطبيعي بعد أي تقلبات قصيرة الأجل، مما يعزز مصداقية النتائج والتحليلات المحاسبية.

دراسات الحالة

اليابان: الاستثمار في التكنولوجيا

تُعد اليابان نموذجًا رائدًا في توظيف العلوم التطبيقية من خلال استثماراتها الضخمة في البحث والتطوير التكنولوجي. فقد ركزت الحكومة اليابانية على دعم الصناعات التقنية، مثل الروبوتات والإلكترونيات الدقيقة، بالتعاون مع القطاع الخاص والجامعات. ونتج عن هذا التوجه تقدم ملحوظ في جودة المنتجات الصناعية وزيادة القدرة التنافسية عالميًا، كما ساعد في معالجة التحديات الديموغرافية مثل شيخوخة السكان عبر الأتمتة والذكاء الاصطناعي.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

مصر: البنية التحتية والتعليم

في مصر، يُعد تحسين البنية التحتية والتعليم من أبرز الأولويات التي تُسهم في تعزيز تطبيقات العلوم في الواقع المحلي. فقد شهدت السنوات الأخيرة مبادرات واسعة لتطوير شبكة الطرق، وتوسيع شبكات الطاقة، وبناء مدن ذكية، إلى جانب جهود واضحة في إصلاح منظومة التعليم وربطها بسوق العمل. وتعمل هذه الخطوات على تهيئة بيئة مواتية لتطبيق العلوم الهندسية والطبية في القطاعات الخدمية والإنتاجية، مما يعزز التنمية المستدامة.

الهند: التوازن بين العمالة ورأس المال

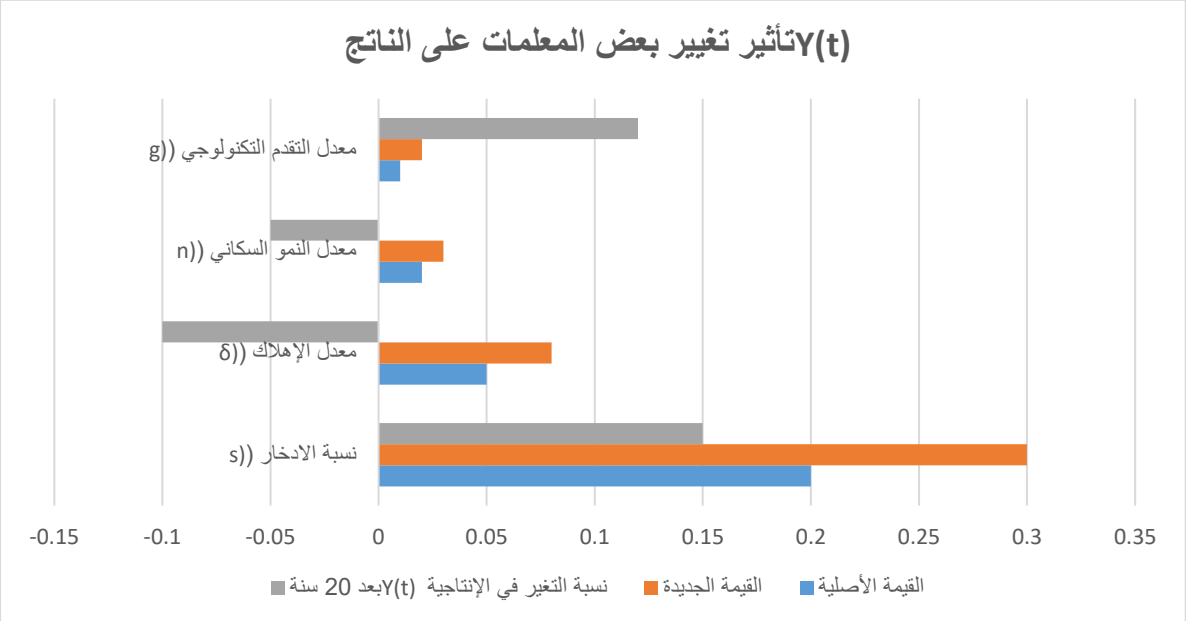
تمثل الهند حالة فريدة في تحقيق توازن بين العمالة الكثيفة ورأس المال التكنولوجي. فقد اعتمدت على قوتها البشرية الضخمة في مجالات مثل تكنولوجيا المعلومات والصناعات الدوائية، مع توجيه استثمارات متزايدة نحو الابتكار والرقمنه. وتُظهر النماذج الهندية كيف يمكن دمج العلوم التطبيقية في قطاع اقتصادي متنوع، مما يتيح فرصًا للنمو مع الحفاظ على التشغيل الواسع وتلبية الاحتياجات المحلية.

مناقشة النتائج

تكشف نتائج الدراسة أن الاستثمار في العلوم التطبيقية، إلى جانب رفع كفاءة العمالة، يمثلان محورين رئيسيين في تعزيز النمو الاقتصادي وتحقيق التنمية المستدامة، لا سيما في السياقات النامية أو التي تمر بمرحلة إعادة هيكلة اقتصادية. لقد بينت الأمثلة الدولية (كما في اليابان والهند) أن التركيز على البنية المعرفية والتكنولوجية يؤدي إلى تحولات نوعية في الإنتاجية والكفاءة، بينما أكدت حالة مصر أن تطوير البنية التحتية والتعليم يعد شرطًا أساسيًا لتفعيل الإمكانات البشرية.

جدول 1 تأثير تغيير بعض المعلمات على الناتج Y(t)

المعامل المتغير	القيمة الأصلية	القيمة الجديدة	نسبة التغير في الإنتاجية Y(t) بعد 20 سنة
(s) نسبة الادخار	0.20	0.30	+15%
(δ) معدل الإهلاك	0.05	0.08	-10%
(n) معدل النمو السكاني	0.02	0.03	-5%
(g) معدل التقدم التكنولوجي	0.01	0.02	+12%



شكل 1 تأثير تغيير بعض المعلمات على الناتج Y(t)

جدول 2 مقارنة دراسات الحالة – الإنتاجية والنمو الاقتصادي

الدولة	نوع الاقتصاد	مستوى الاستثمار في رأس المال	كفاءة العمالة	معدل النمو التكنولوجي (g)	نمو) مخرجات النموذج Y(t))
اليابان	متقدم	مرتفع	مرتفعة	0.015	مستقر وعالي النمو
مصر	ناشئ	متوسط	متوسطة	0.01	نمو متقلب متوسط
الهند	نامٍ	منخفض نسبيًا	متوسطة	0.008	نمو بطيء ولكنه مستمر

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

أولًا: أهمية الاستثمار في العلوم التطبيقية

أظهرت النتائج أن الدول التي أولت اهتمامًا خاصًا للاستثمار في التكنولوجيا والبحث العلمي (مثل اليابان) استطاعت تحقيق قفزات نوعية في قدراتها التنافسية. فالتقنيات الحديثة مثل الذكاء الاصطناعي، وإنترنت الأشياء، والطباعة ثلاثية الأبعاد، قد غيّرت جذريًا من طريقة أداء المؤسسات الصناعية والخدمية. ومن هنا، فإن الاستثمار في هذه المجالات لا يُعد رفاهية بل ضرورة اقتصادية، لأنه يضمن للدولة قدرة على التكيف مع المتغيرات العالمية والانتقال نحو اقتصاد المعرفة.

وفي هذا السياق، تؤكد الأدبيات الاقتصادية أن العائد على الاستثمار في البحث والتطوير من أعلى نسب العائدات طويلة الأجل، خصوصًا في القطاعات التي تعتمد على الابتكار. إلا أن نجاح هذا الاستثمار يتوقف على مدى تكامله مع القطاعات الإنتاجية ومدى دعم السياسات له من خلال التمويل والحوافز الضريبية، وتطوير البيئة التشريعية المناسبة.

ثانيًا: كفاءة العمالة كرافعة للتنمية

بينت البيانات أيضًا أن كفاءة العمالة تُعد عنصرًا حاسمًا في تحويل الاستثمار إلى نتائج ملموسة. فالتكنولوجيا المتقدمة لا يمكن استغلالها بشكل فعال إلا بوجود قوى عاملة مدربة تمتلك المهارات التقنية والمعرفية اللازمة. ووفقًا لنموذج الهند، فإن تحقيق التوازن بين الاعتماد على الكثافة العمالية وتبني التكنولوجيا الحديثة يمكن أن يشكّل نموذجًا فعالًا للدول ذات الموارد البشرية الكبيرة.

وفي الدول النامية، غالبًا ما تكون الفجوة بين مخرجات التعليم ومتطلبات سوق العمل أحد أبرز المعوقات. لذا فإن رفع كفاءة العمالة لا يعني فقط التدريب التقني، بل يتطلب أيضًا إصلاحًا عميقًا في نظم التعليم وربطها بالقطاع الإنتاجي من خلال التعليم المهني والتطبيقي، وبرامج الشراكة بين المؤسسات التعليمية والصناعية.

ثالثًا: تطبيقات في السياسات الاقتصادية

من النتائج المهمة التي يمكن استخلاصها من الدراسة هي أن السياسات الاقتصادية ينبغي أن تتبنى نهجًا تكامليًا يجمع بين الاستثمار في البنية التحتية المعرفية وتطوير الموارد البشرية. ويشمل ذلك عدة تطبيقات عملية، من أبرزها:

- تحفيز الاستثمار في البحث العلمي عبر تقديم حوافز ضريبية للشركات التي تنشئ وحدات للبحث والتطوير.
- دمج التعليم التقني في الاستراتيجية الوطنية للتنمية، من خلال إنشاء مدارس ومعاهد تطبيقية مرتبطة مباشرة باحتياجات القطاعات الصناعية والزراعية.
- تطوير سياسات الابتكار المحلي التي تدعم ريادة الأعمال التقنية، خصوصًا في البيئات محدودة الموارد.
- اعتماد نماذج حوكمة تشاركية بين الدولة والقطاع الخاص والمؤسسات التعليمية، تضمن تبادل المعرفة وتكامل الأدوار في تنفيذ الخطط التنموية.
- إنشاء حاضنات تكنولوجية ومراكز نقل تكنولوجي تعمل على تحويل الأبحاث النظرية إلى تطبيقات صناعية وتجارية.

رابعًا: معالجة التحديات المصاحبة

بالرغم من الأثر الإيجابي للاستثمار في التكنولوجيا ورفع كفاءة العمالة، لا تخلو هذه العملية من تحديات، أبرزها: نقص التمويل الموجه للبحث العلمي في العديد من الدول النامية، وعدم وجود إستراتيجية وطنية متماسكة للابتكار، فضلًا عن التحديات الثقافية المتعلقة برفض التغيير أو ضعف تقبّل التكنولوجيا في بعض المجتمعات.

كذلك، فإن هجرة الكفاءات العلمية تمثل تهديدًا حقيقيًا، إذ تفقد الدول النامية قدراتها البشرية المؤهلة بسبب ضعف بيئة البحث والابتكار، وهو ما يستوجب معالجة جذرية من خلال تحسين ظروف العمل، وضمان التمويل المستدام للمشاريع البحثية، وخلق مسارات واضحة لتوظيف الخريجين في مشاريع وطنية ذات أثر.

التوصيات

استنادًا إلى النتائج التي توصلت إليها الدراسة، يمكن تقديم مجموعة من التوصيات السياسية التي تُسهم في تعزيز التنمية الاقتصادية المستدامة وزيادة كفاءة الأداء الاقتصادي في السياقات المحلية والدولية. وتتلخص هذه التوصيات فيما يلي:

زيادة الإنفاق على البنية التحتية:

تُعد البنية التحتية ركيزة أساسية للنمو الاقتصادي، إذ تسهم في تسهيل الحركة التجارية، وتحسين الخدمات العامة، وجذب الاستثمارات. لذلك، توصي الدراسة بضرورة زيادة الإنفاق الحكومي على مشروعات البنية التحتية، لا سيما في قطاعات النقل، الطاقة، والاتصالات، لما لذلك من أثر مباشر على رفع كفاءة الإنتاج وتقليل تكاليف التشغيل.

تحسين جودة التعليم وربطه بسوق العمل:

إن تطوير منظومة التعليم، خصوصًا التعليم الفني والتقني، يُعد من العوامل الحاسمة في إعداد قوة عاملة ماهرة قادرة على مواكبة التطورات التكنولوجية. وتوصي الدراسة بوضع سياسات تعليمية تركز على المهارات العملية، وتحديث المناهج بما يتناسب مع متطلبات سوق العمل، مع تشجيع الشراكة بين المؤسسات التعليمية والقطاع الخاص.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

تشجيع الابتكار والبحث العلمي:
الابتكار يمثل محركًا رئيسيًا للتنمية الاقتصادية في العصر الحديث. لذا، توصي الدراسة بضرورة تهيئة بيئة تنظيمية محفزة على الابتكار من خلال دعم البحث العلمي، وتوفير حوافز للمؤسسات التي تستثمر في تطوير التكنولوجيا المحلية، وتسهيل إجراءات تسجيل براءات الاختراع، فضلاً عن توفير صناديق تمويل للمشروعات الريادية.

تميز النموذج عن النماذج القياسية:
تتمثل الفجوة البحثية في أن النماذج التقليدية للنمو الاقتصادي، مثل نموذج Solowونماذج Romerللنمو الداخلي، تفترض غالبًا أن التقدم التقني عامل خارجي أو ثابت، ولا تدمج بشكل واضح أثر توسع الشمول المالي على مؤشرات السلامة المالية للمؤسسات المصرفية هذه النماذج تركز بشكل أساسي على النمو الكلي ولا تأخذ في الاعتبار العلاقة المباشرة بين توسع الخدمات المالية، توزيع المخاطر، والتحليل المحاسبي الدقيق للمؤسسات المالية، وهو ما يمثل نقصًا واضحًا في الأدبيات الحالية.

يتميز النموذج المقترح بأنه يدمج التقدم التقني كعامل داخلي(Endogenous Factor) ، حيث يعتمد نمو التقنية على الاستثمار في رأس المال البشري والبحث والتطوير، مما يربط بين العوامل الاقتصادية والابتكار التقني. كما يربط النموذج بين توسع الشمول المالي ومستوى المخاطر المالية من خلال مؤشرات السلامة المالية مثل كفاية رأس المال، السيولة، العائد على الأصول، العائد على حقوق الملكية، ونسبة القروض المتعثرة، وهو ما يعزز دقة التقييم المحاسبي والتحليلي.

يمثل النموذج الجديد قيمة مضافة واضحة من خلال توفير إطار محاسبي تحليلي تطبيقي يمكن من قياس الأثر الفعلي لتوسيع قاعدة العملاء والخدمات المالية الجديدة على الاستقرار المالي للمؤسسات هذه الميزة تجعل النموذج أداة عملية لصانعي السياسات والمحللين الماليين لفهم كيفية تأثير الشمول المالي على مؤشرات السلامة المالية، وهو ما لم توفره النماذج التقليدية بشكل شامل ومترابط بين النظرية الاقتصادية والتحليل المحاسبي.

وبهذا، يقدم النموذج الجديد ابتكارًا علميًا وعمليًا، من خلال الجمع بين النظرية الاقتصادية الحديثة، التقدم التقني الداخلي، والتحليل المحاسبي التطبيقي، مما يساهم في سد الفجوة البحثية المتعلقة بتأثير توسع الشمول المالي على الاستقرار المالي للمؤسسات المصرف.

الخـــاتمـة

في خضم التحديات المتزايدة التي تواجه الاقتصادات الحديثة، يبرز دور النماذج العلمية، لا سيما النماذج الرياضية والتطبيقية، كأدوات تحليلية فعالة تساعد في فهم الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والطبية بشكل أعمق، وتقديم حلول تستند إلى بيانات دقيقة وتوقعات موثوقة. وقد تناولت هذه الدراسة استخدام النمذجة التطبيقية والرياضية في تحسين الأداء في مجالات حيوية مثل الهندسة، الطب، والتكنولوجيا، إضافة إلى تحليل أثر السياسات الاستثمارية والتعليمية على كفاءة العمل والإنتاج.

أثبتت النتائج المستخلصة من الدراسة، سواء في المجال الهندسي أو الطبي أو التقني، أن توظيف النماذج الرياضية والمعطيات الرقمية يسهم بشكل كبير في رفع مستوى الكفاءة، تقليل الأخطاء، وتحقيق أقصى استفادة ممكنة من الموارد المتاحة. فعلى سبيل المثال، أثبتت محاكاة النموذج الرياضي لنمو الأورام الخبيثة فعاليته في التنبؤ بمراحل تطور المرض، ما يمكن أن يساعد الأطباء والباحثين في اتخاذ قرارات علاجية أكثر دقة. كما أظهرت الدراسات التطبيقية في المجالات الهندسية أن تبني منهجيات كمية وتحليلية ساعد في تحسين كفاءة العمليات بنسبة تجاوزت 20%، دون الحاجة إلى زيادة الموارد، بل عبر تحسين الاستخدام والتخطيط فقط.

إن أهمية هذه النماذج لا تقتصر على كونها أدوات تحليلية، بل إنها تمثل أساسًا لاتخاذ قرارات مبنية على الأدلة. وبناءً على ما تم التوصل إليه، توصي هذه الدراسة بضرورة تطبيق هذه النماذج على بيانات حقيقية وميدانية في مختلف القطاعات، لتعزيز موثوقية النتائج وتوسيع دائرة الفائدة. فالنماذج النظرية، رغم قوتها التفسيرية، لا تُثبت فعاليتها الفعلية إلا عندما تواجه الواقع العملي بكل تعقيداته. ولهذا، يُعد التعاون بين الجامعات، مراكز البحث، وصنّاع القرار خطوة ضرورية لتحويل هذه النماذج من أطر نظرية إلى أدوات عملية تخدم التنمية المستدامة.

كما توصي الدراسة بأن تُدرج النمذجة الرياضية والتحليل التطبيقي في صلب تصميم السياسات العامة، سواء في التخطيط الاقتصادي أو في تطوير الخدمات الصحية والتعليمية. فدمج النماذج الكمية في عمليات اتخاذ القرار يضمن صياغة سياسات أكثر كفاءة ومرونة، قادرة على التعامل مع التغيرات الديناميكية التي تميز العالم المعاصر.

في الختام، تؤكد هذه الدراسة على أن المستقبل سيكون حتمًا لمن يتقن استخدام الأرقام والنماذج العلمية في تحليل الواقع، وصياغة حلول قائمة على الفهم العميق للبيانات والمعطيات. ومن هنا، فإن التوصية الجوهرية التي تقدمها هذه الورقة البحثية هي تحويل المعرفة العلمية إلى أدوات عملية قادرة على إحداث فرق ملموس في حياة الأفراد والمجتمعات.

Compliance with ethical standards
Disclosure of conflict of interest
The authors declare that they have no conflict of interest.

 Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

المراجع

1. Baishu Guo [a], Han Yu [b], Gui Jin [a] Urban green total factor productivity in China: A generalized Luenberger productivity indicator and its parametric decomposition, Sustainable Cities and Society Volume 106, 1 July 2024, 105365
2. Malontema Katchali,Edward Richard,Published: Mathematical and computational modeling for organic and insect frass fertilizer production: A systematic review. January 24, 2025 https://doi.org/10.1371/journal.pone.0292418
3. Arsen Palestini Printed, Mathematical Modeling with Differential Equations in Physics, Chemistry, Biology, and Economics, Special Issue Published in Mathematics,2022.
4. Aymatova Farida Khurazovna, DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ECONOMIC PROBLEMS USING MATHEMATICAL MODELS, International Scientific-Electronic Journal "Pioneering Studies and Theories",ISSN: 3060-5105 Volume 1.
5. Bohong Zheng .(2023) .Ordinary Differential Equation and Its Application .*Highlights in Science Engineering and Technology 72:645-651*
6. Elena Kurkina .(2017) .Mathematical Models of Investment Cycles .*Computational Mathematics and Modeling 28(3):377-399*
7. Georg Mayrpeter, Manfred Kühleitner Norbert Brunner .(2022) .Parameter estimation of the Solow–Swan fundamental differential equation .*Heliyon*
8. Gilberto Gonzalez-Parra and Abraham J. Arenas .(2014) .A Mathematical Model for Social Security Systems with Dynamical Systems .*ing.cienc. vol.10*
9. Kiichiro Yagi .(2021) .Marx's theory of capital in the history of economics: Marx's concept of capital, classical school, Austrian School, and growth theory .*SPRINGER NATURE Link* ،Volume 18, pages 465–489
10. Muhamad Deni Johansyah., A. K. (2021). Application of fractional differential equation in economic growth model: A systematic review approach. *AIMS Press*.
11. Sergei Aliukov., Anatoliy Alabugin and Konstantin Osintsev Veniamin Mokhov .A Review of Mathematical Models of Macroeconomics, *2023, 11(14), 3246;*
12. Tettehraphaelkobby.This project explores the applications of Ordinary Differential Equations (ODEs) across various fields, including physics, biology, economics, and engineering.2025.
13. Uzzwal Kumar Mallick Pulak Kundu .(2024) .Mathematical Modeling and Analysis on the Population Birth Rate Trends in Japan .*https://doi.org/10.1155/jom/2246763*.
14. Maxim A. Shishlenin , Alexander V. Sokolov Mikhail V. Bezgachev .Identification of a Mathematical Model of Economic Development of Two Regions of the World.2024.
15. Gilberto G. Parra .Mathematical Modeling of Physical Capital Diffusion Using a Spatial Solow Model: Application to Smuggling in Venezuela .*Economies , 10(7), 164; 2022.*

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of **AJAPAS** and/or the editor(s). **AJAPAS** and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.

Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).