African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 5, Issue 3, 2026
Page No: 290-296
Website: *https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index*
ISI 2025: 1.126 **SJIFactor 2024: 6.752** **معامل التأثير العربي: 1.62**

Comparative analysis of Euler's and Runge-Kutta's methods for solving differential equations

Hend B. khalifa [1*], Hend A. Eissa [2]
[1] General Department, College of Computer Technology, Tripoli, Libya
[2] Department of Information Technology, Electronic Technology College, Tripoli, Libya

تحليل مقارن لطريقتي أويلر ورونج-كوتا في حل المعادلات التفاضلية

هند بلعيد خليفة [1*]، هند عبد القادر عيسى [2]
[1] قسم المواد العامة، كلية تقنية الحاسوب، طرابلس، ليبيا
[2] قسم تقنية المعلومات، كلية التقنية الالكترونية، طرابلس، ليبيا

[*]*Corresponding author: hindkarm210@gmail.com*

Received: May 04, 2026	Accepted: August 04, 2026	Published: August 13, 2026

Abstract
Ordinary differential equations (ODEs) are among the most vital mathematical tools utilized in modeling numerous scientific and engineering phenomena. This research aims to conduct a comparative analysis between Euler's method and the fourth-order Runge-Kutta (RK4) method for solving ODEs, by investigating numerical accuracy, numerical stability, and computational efficiency, while demonstrating the impact of step size on the quality of the numerical solution. The comparative results reveal that the Runge-Kutta method achieves a higher level of accuracy and stability compared to Euler's method. Conversely, Euler's method is characterized by ease of implementation and low computational cost, indicating that selecting the appropriate method depends on the nature of the problem and the required level of accuracy.

Keywords: Euler's method, Runge-Kutta method, ordinary differential equations (ODEs), numerical stability, predictor-corrector methods.

الملخص
تعد المعادلات التفاضلية العادية من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في نمذجة العديد من الظواهر العلمية والهندسية. يهدف هذا البحث إلى إجراء تحليل مقارن بين طريقتي أويلر ورونج-كوتا من الرتبة الرابعة في حل المعادلات التفاضلية العادية، من خلال دراسة الدقة العددية، والاستقرار العددي، والكفاءة الحسابية، مع بيان تأثير حجم الخطوة على جودة الحل العددي. أظهرت نتائج المقارنة أن طريقة رونج-كوتا تحقق مستوى أعلى من الدقة والاستقرار مقارنة بطريقة أويلر، في حين تمتاز طريقة أويلر بسهولة التنفيذ وانخفاض التكلفة الحسابية، مما يجعل اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على طبيعة المسألة ومستوى الدقة المطلوب.

الكلمات المفتاحية: طريقة أويلر، طريقة رونج-كوتا، المعادلات التفاضلية العادية، الاستقرار العددي، طرق التنبؤ والتصحيح.

المقدمة

تُعد المعادلات التفاضلية العادية من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في توصيف الظواهر الطبيعية والهندسية، إذ تمثل إطارًا رياضيًا لدراسة العلاقات بين المتغيرات ومعدلات تغيرها مع الزمن أو المكان، وتستخدم في العديد من المجالات، مثل ميكانيكا الحركة، وانتقال الحرارة، والتفاعلات الكيميائية، والأنظمة الكهربائية، والديناميكا الحيوية. إلا أن الحصول على حلول تحليلية دقيقة لهذه المعادلات يكون في كثير من الأحيان أمرًا صعبًا، خاصة عند التعامل مع المعادلات غير

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

الخطية أو المسائل ذات الشروط الابتدائية والحدودية المعقدة، مما أدى إلى الاعتماد على الطرق العددية للحصول على حلول تقريبية ذات دقة مناسبة (Butcher, 2016).
كما تعتمد الطرق العددية في أحيانا كثيرة على تقسيم مجال الحل إلى خطوات صغيرة، ثم حساب القيم التقريبية للحل بصورة متتابعة، وقد شهدت هذه الطرق تطورًا كبيرًا مع تطور تقنيات الحوسبة، وأصبحت أداة أساسية في التحليل العددي والتطبيقات العلمية والهندسية. وتعد طريقة أويلر من أبسط هذه الطرق وأكثرها استخدامًا في المراحل التعليمية، حيث تعتمد على تقريب المشتقة باستخدام فرق أمامي، وتمتاز بسهولة التنفيذ وانخفاض التكلفة الحسابية، إلا أن دقتها واستقرارها العددي يكونان محدودين، خاصة عند استخدام أحجام خطوة كبيرة (Ralston, 2001).
في المقابل، تعد طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة من أكثر الطرق العددية انتشارًا، نظرًا لقدرتها على تحقيق مستوى مرتفع من الدقة من خلال استخدام عدة تقديرات للميل داخل الخطوة الواحدة، مما يقلل من الخطأ التراكمي ويحسن استقرار الحل دون الحاجة إلى حساب مشتقات عليا. وقد أثبتت الدراسات أن هذه الطريقة تتفوق على طريقة أويلر في معظم التطبيقات العلمية والهندسية، على الرغم من زيادة عدد العمليات الحسابية المطلوبة في كل خطوة (Workineh., 2024).
كما أسهمت التطورات الحديثة في تحسين أداء الطرق العددية من خلال تطوير خوارزميات أكثر كفاءة، مثل طرق التنبؤ والتصحيح والطرق ذات الخطوة المتغيرة، الأمر الذي وسع نطاق استخدامها في النمذجة الرياضية والمحاكاة العددية للأنظمة المعقدة. ويعتمد اختيار الطريقة العددية المناسبة على تحقيق التوازن بين الدقة العددية، والاستقرار، والكفاءة الحسابية، بما يتوافق مع طبيعة المسألة المطلوب حلها (Biswas et al., 2023).
يهدف هذا البحث إلى إجراء تحليل مقارن بين طريقتي أويلر ورونج-كوتا من الرتبة الرابعة في حل المعادلات التفاضلية العادية، من خلال دراسة الخصائص النظرية والعملية لكل منهما، ومقارنة مستوى الدقة والاستقرار العددي والكفاءة الحسابية، وصولًا إلى تحديد الطريقة الأنسب وفقًا لطبيعة المسألة ومتطلبات التطبيق، بما يسهم في دعم استخدام الطرق العددية في التطبيقات العلمية والهندسية المختلفة.

مشكلة البحث

تعاني بعض الطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية العادية من انخفاض مستوى الدقة، وازدياد الخطأ التراكمي، خاصة عند استخدام أحجام خطوة كبيرة أو عند التعامل مع بعض أنواع المسائل العددية. لذلك تبرز الحاجة إلى إجراء مقارنة بين طريقتي أويلر ورونج-كوتا من الرتبة الرابعة لتحديد الطريقة الأكثر كفاءة واستقرارًا في التطبيقات المختلفة.

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تحقيق الأهداف التالية:

- دراسة آلية عمل طريقتي أويلر ورونج-كوتا من الرتبة الرابعة.
1. مقارنة الطريقتين من حيث الدقة والاستقرار العددي.
2. تحليل تأثير حجم الخطوة على نتائج الحل العددي.
3. تقييم الكفاءة الحسابية لكل طريقة وتحديد مجالات استخدامها.

الإطار النظري

1 طريقة أويلر

تُعد طريقة أويلر من أبسط الطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية العادية من النوع الأولي، حيث تقوم فكرتها الأساسية على تقريب المشتقة عند نقطة معينة باستخدام التوسع في سلسلة تايلور من الرتبة الأولى، ومن ثم استخدام هذا التقريب للحصول على قيمة تقريبية للحل عند النقطة التالية. ويعني ذلك أن الطريقة تعتمد على تمثيل سلوك الدالة بخط مستقيم يساوي المماس عند النقطة الحالية، وهو ما يجعلها طريقة خطية في جوهرها وتعكس سلوكاً تقريبياً للحل الحقيقي (Atkinson, 1991; Ralston & Rabinowitz, 2001).

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$$

في هذه الصيغة، يمثل y_n القيمة التقريبية للحل عند النقطة x_n، بينما يمثل h حجم الخطوة، وهو مقدار الزيادة في المتغير المستقل بين خطوتين متتاليتين، أما $f(x_n, y_n)$ فهي قيمة المشتقة عند النقطة الحالية، والتي تُستخدم لتحديد اتجاه الحل. ويُعد اختيار حجم الخطوة من العوامل الحاسمة في دقة الطريقة، حيث يؤدي تقليل قيمة h إلى تحسين دقة النتائج، ولكنه في المقابل يزيد من عدد الخطوات المطلوبة وبالتالي من التكلفة الحسابية.
من الناحية النظرية، تعتمد طريقة أويلر على إهمال الحدود العليا في متسلسلة تايلور، وهو ما يؤدي إلى ظهور خطأ تقريبي في كل خطوة، ويُعرف هذا الخطأ بالخطأ الموضعي المحلي، والذي يكون من الرتبة $O(h^2)$، بينما يُعرف الخطأ الناتج عن تراكم هذه الأخطاء عبر جميع الخطوات بالخطأ العالمي، والذي يكون من الرتبة $O(h)$. وهذا يعني أن دقة الطريقة

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

تتحسن بشكل خطي مع تقليل حجم الخطوة، إلا أن هذا التحسن يكون محدوداً مقارنة بالطرق ذات الرتب الأعلى (Butcher, 2016; Lambert, 1973).

ومن الخصائص المهمة لطريقة أويلر أنها تُعد طريقة صريحة، حيث يمكن حساب القيمة التالية مباشرة دون الحاجة إلى حل معادلات إضافية، وهذا ما يجعلها سهلة التنفيذ برمجياً وسريعة من حيث العمليات الحسابية، إذ تتطلب تقييماً واحداً فقط للدالة في كل خطوة. وتُعتبر هذه الميزة من الأسباب التي جعلت الطريقة تُستخدم بشكل واسع في التطبيقات التعليمية، حيث تساعد على فهم المبادئ الأساسية للتحليل العددي بشكل واضح وبسيط .

وعلى الرغم من هذه المزايا، فإن طريقة أويلر تعاني من عدة قيود تحد من استخدامها في التطبيقات العملية المتقدمة، حيث تُظهر دقة منخفضة نسبياً عند استخدام خطوات زمنية كبيرة، كما أنها قد تعطي نتائج غير مستقرة في بعض الحالات، خاصة عند التعامل مع المعادلات الجامدة التي تتطلب خصائص استقرار خاصة. ففي مثل هذه الحالات، قد يؤدي الخطأ إلى التزايد بشكل سريع، مما يجعل الحل العددي ينحرف بشكل كبير عن الحل الحقيقي (Islam, 2015; Kumar & Bhardwaj, 2023).

كما أن اعتماد الطريقة على تقريب خطي يجعلها غير قادرة على تمثيل السلوك غير الخطي للمعادلات التفاضلية بدقة عالية، خاصة في المسائل التي تتضمن تغيرات حادة أو ديناميكيات معقدة. ولذلك، فإن استخدامها يكون مناسباً فقط في الحالات البسيطة أو كمرحلة أولية للحصول على تقديرات تقريبية، قبل استخدام طرق أكثر دقة مثل طريقة رونج-كوتا.

ومن الجوانب المهمة أيضاً في تحليل طريقة أويلر دراسة استقرارها العددي، حيث يُقصد بالاستقرار قدرة الطريقة على التحكم في نمو الأخطاء أثناء الحساب. وقد أظهرت الدراسات أن طريقة أويلر تمتلك مجال استقرار محدود، مما يعني أنها قد تصبح غير مستقرة إذا لم يتم اختيار حجم الخطوة بشكل مناسب، خاصة في المسائل التي تتضمن معاملات كبيرة أو تغيرات سريعة في الحل .

وفي إطار طرق التنبؤ والتصحيح، تُستخدم طريقة أويلر أحياناً كخطوة تنبؤية أولية، حيث يتم استخدامها لتقدير قيمة الحل عند النقطة التالية، ثم يتم تصحيح هذه القيمة باستخدام طريقة أكثر دقة، مثل طريقة آدامز-مولتون. ويُظهر هذا الاستخدام أن طريقة أويلر، رغم بساطتها، لا تزال تحتفظ بدور مهم في بناء الطرق العددية المتقدمة (Koroche & Mayu, 2021; Shior et al., 2022).

كما أن هناك العديد من المحاولات لتطوير طريقة أويلر وتحسين أدائها، مثل طريقة أويلر المحسنة أو طريقة هيوين، والتي تهدف إلى تقليل الخطأ من خلال أخذ متوسط المشتقات عند نقطتين مختلفتين، مما يؤدي إلى زيادة دقة الحل دون زيادة كبيرة في التكلفة الحسابية. وتُعد هذه التحسينات دليلاً على أهمية الطريقة كأساس لتطوير طرق عددية أكثر تقدماً.

وبشكل عام، يمكن القول إن طريقة أويلر تمثل نقطة البداية في دراسة الطرق العددية للمعادلات التفاضلية، حيث توفر فهماً واضحاً لمفهوم التقريب العددي، وتُستخدم كمرجع أساسي لمقارنة أداء الطرق الأخرى. وعلى الرغم من محدودية دقتها واستقرارها، إلا أنها تظل أداة تعليمية مهمة، كما تُستخدم في بعض التطبيقات التي لا تتطلب دقة عالية أو التي تكون فيها الموارد الحسابية محدودة.

2 طريقة رونج-كوتا الرتبة الرابعة

تُعد طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة من أهم وأكثر الطرق العددية استخداماً في حل المعادلات التفاضلية العادية، نظراً لقدرتها على تحقيق درجة عالية من الدقة دون الحاجة إلى حساب مشتقات عليا كما هو الحال في طرق تايلور. وتعتمد هذه الطريقة على تحسين التقريب العددي من خلال أخذ عدة تقديرات لميل الدالة داخل كل خطوة، ثم دمج هذه التقديرات للحصول على قيمة أكثر دقة للحل عند النقطة التالية (Butcher, 2016;).

$$k1 = f(xn, yn),$$
$$k2 = f\left(xn + \frac{h}{2}, yn + \frac{h}{2}k1\right),$$
$$k3 = f\left(xn + \frac{h}{2}, yn + \frac{h}{2}k2\right),$$
$$k4 = f(xn + h, yn + hk3),$$
$$yn + 1 = yn + \frac{h}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4).$$

في هذه الصيغة، يتم حساب أربع قيم وسيطة $k1, k2, k3, k4$ تمثل تقديرات مختلفة لميل الدالة داخل الفترة $[xn, x_{n+1}]$، حيث يُستخدم كل تقدير لتحسين التقدير التالي، ثم يتم حساب المتوسط المرجح لهذه القيم للحصول على القيمة النهائية $[yn, y_{n+1}]$. ويُلاحظ أن هذه الطريقة تأخذ في الاعتبار سلوك الدالة داخل الخطوة بالكامل، وليس فقط عند بدايتها كما في طريقة أويلر، مما يؤدي إلى تحسين ملحوظ في دقة النتائج.

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

من الناحية النظرية، تُصنف طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة كطريقة ذات خطأ موضعي محلي من الرتبة $O(h^5)$، بينما يكون الخطأ العالمي من الرتبة $O(h^4)$، وهو ما يعني أن دقة الطريقة تتحسن بشكل كبير عند تقليل حجم الخطوة مقارنة بطريقة أويلر. ويُعد هذا التحسن نتيجة مباشرة لاستخدام عدة تقييمات للدالة داخل كل خطوة، مما يسمح بتمثيل أفضل للسلوك الحقيقي للحل (Rabinowitz, 2001).

وتتميز هذه الطريقة بقدرتها على تحقيق توازن فعال بين الدقة والتكلفة الحسابية، حيث توفر دقة عالية حتى عند استخدام حجوم خطوة أكبر نسبياً، مما يقلل من عدد الخطوات المطلوبة للوصول إلى نفس المستوى من الدقة مقارنة بالطرق ذات الرتب الأقل. ومع ذلك، فإن هذه الميزة تأتي على حساب زيادة عدد التقييمات للدالة، حيث تتطلب الطريقة أربع تقييمات في كل خطوة، وهو ما قد يؤدي إلى زيادة زمن التنفيذ في المسائل الكبيرة أو عند التعامل مع أنظمة معقدة (Olatunji & Akeju, 2025).

ومن الجوانب المهمة في طريقة رونج-كوتا أنها تُعد طريقة صريحة، مما يعني أنه يمكن حساب القيمة التالية مباشرة دون الحاجة إلى حل معادلات ضمنية، وهو ما يجعلها سهلة التطبيق في البرمجيات العددية. كما أنها تتمتع بخصائص استقرار أفضل مقارنة بطريقة أويلر، مما يجعلها مناسبة لمجموعة واسعة من المسائل، خاصة تلك التي تتطلب دقة عالية واستقراراً عددياً جيداً.

وقد أثبتت الدراسات أن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة تُعد من أكثر الطرق كفاءة في حل المسائل غير الجامدة، حيث توفر نتائج دقيقة مع عدد خطوات أقل، مما يقلل من تراكم الأخطاء العددية. كما أنها تُستخدم بشكل واسع في التطبيقات الهندسية والعلمية، مثل النمذجة الفيزيائية، تحليل الأنظمة الديناميكية، والمحاكاة العددية للعمليات المعقدة (Workineh et al., 2024; Kumar & Bhardwaj, 2023).

وفي إطار طرق التنبؤ والتصحيح، تُستخدم طريقة رونج-كوتا غالباً لتوليد القيم الابتدائية اللازمة لبدء الطرق متعددة الخطوات مثل طريقة آدامز-باشفورث-مولتون، حيث تساهم دقتها العالية في تحسين أداء هذه الطرق وتقليل الخطأ التراكمي. ويُعد هذا الاستخدام دليلاً على أهميتها كأساس لبناء خوارزميات عددية أكثر تقدماً (Shior et al., 2022).

كما شهدت طريقة رونج-كوتا تطورات متعددة تهدف إلى تحسين أدائها، مثل الطرق ذات الخطوة المتغيرة التي تسمح بتعديل حجم الخطوة تلقائياً بناءً على تقدير الخطأ، وكذلك الطرق المدمجة التي توفر تقديرين مختلفين للحل من أجل التحكم في الدقة. وتُستخدم هذه التطويرات في التطبيقات التي تتطلب دقة عالية وكفاءة حسابية، خاصة في الأنظمة المعقدة أو الحساسة (Biswas et al., 2023; Lee et al., 2020).

وبشكل عام، يمكن القول إن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة تمثل معياراً مهماً في التحليل العددي، حيث تجمع بين الدقة العالية وسهولة التطبيق، مما يجعلها الخيار المفضل في العديد من التطبيقات العملية. كما أنها تُستخدم كمرجع أساسي للمقارنة مع الطرق الأخرى، وتُعد من الأدوات الأساسية التي يعتمد عليها الباحثون والمهندسون في حل المعادلات التفاضلية العادية.

التطبيق في طرق التنبؤ والتصحيح

تلعب كل من طريقة أويلر وطريقة رونج-كوتا دوراً مهماً في طرق التنبؤ والتصحيح، خاصة في طريقة آدامز-باشفورث-مولتون، حيث تُستخدم هذه الطرق لتوليد القيم الابتدائية أو كخطوة تنبؤية قبل تطبيق خطوة التصحيح. وتعتمد جودة النتائج النهائية بشكل كبير على دقة هذه القيم الابتدائية (Shior et al., 2022).

وقد أظهرت الدراسات أن استخدام طريقة رونج-كوتا كخطوة تنبؤية أو لتوليد القيم الابتدائية يؤدي إلى تحسين ملحوظ في دقة الحل النهائي مقارنة باستخدام طريقة أويلر، وذلك بسبب دقتها العالية وقدرتها على تقليل الخطأ في المراحل الأولى من الحساب، مما ينعكس إيجابياً على أداء طريقة التصحيح (Olatunji, 2025).

في المقابل، يمكن استخدام طريقة أويلر في الحالات التي لا تتطلب دقة عالية أو عندما يكون الهدف هو الحصول على تقديرات أولية سريعة، إلا أن استخدامها قد يؤدي إلى زيادة الخطأ التراكمي في الطرق متعددة الخطوات إذا لم يتم تصحيحه بشكل كافٍ.

وبشكل عام، تُظهر المقارنة التحليلية أن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة تتفوق على طريقة أويلر في معظم الجوانب، خاصة من حيث الدقة والاستقرار، بينما تظل طريقة أويلر مفيدة في الحالات البسيطة أو كأداة تعليمية، مما يؤكد أن اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على طبيعة المسألة ومتطلبات التطبيق.

الأمثلة العددية توضيحية

لإعطاء صورة أوضح عن الفارق الكبير في الدقة بين الطريقتين، سنأخذ مثالاً آخر يوضح كيف تنحرف طريقة أويلر سريعاً عن الحل الحقيقي بمرور الوقت (أو زيادة عدد الخطوات)، بينما تظل طريقة RK4 منطبقة تماماً عليه.

مثال 1: دالة أسية سريعة التغير

- **المعادلة التفاضلية:** $\frac{dy}{dx} = y$
- **الشرط الابتدائي:** $y(0) = 1$

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

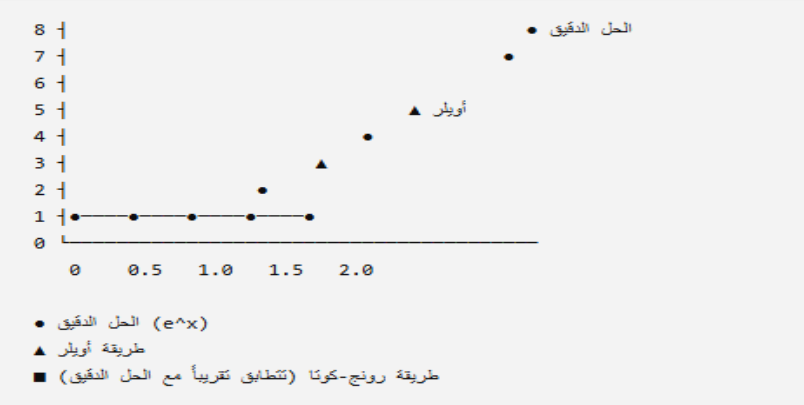
- **حجم الخطوة:** $h = 0.5$ (اخترنا خطوة كبيرة نسبيًا لإظهار الفارق بوضوح).
- **المطلوب:** حساب القيم من $x = 0$ إلى $x = 2$.

مقارنة النتائج الحسابية خطوة بخطوة

الحل الدقيق (التحليلي) لهذه المعادلة هو الدالة الأسية الشهيرة: $y = e^x$.

عند حساب الخطوات (من $x = 0$ إلى $x = 2$) بحجم خطوة $h = 0.5$، نحصل على النتائج التالية:

قيمة x	الحل الدقيق (ex)	طريقة أويلر (Euler)	طريقة رونج-كوتا (RK4)
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.5	1.6487	1.5000	1.6484
1.0	2.7183	2.2500	2.7173
1.5	4.4817	3.3750	4.4792
2.0	**7.3891**	**5.0625**	**7.3841**



الشكل (1): مقارنة نتائج الحل العددي باستخدام طريقتي أويلر ورونج-كوتا مع الحل التحليلي للمعادلة $y = e^x$.

يتضح من الرسم البياني أن منحنى **طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة (RK4)** يكاد يتطابق مع منحنى الحل التحليلي على امتداد المجال المدروس، مما يدل على دقتها العالية. في المقابل، يبتعد منحنى **طريقة أويلر** تدريجياً عن الحل الدقيق مع زيادة قيمة x، ويزداد هذا الانحراف كلما تقدم الحساب، وهو ما يعكس تراكم الخطأ العددي في طريقة أويلر. ويؤكد الشكل أن طريقة رونج-كوتا أكثر قدرة على تتبع السلوك الحقيقي للحل مع المحافظة على مستوى مرتفع من الدقة حتى عند استخدام نفس حجم الخطوة، في حين تتطلب طريقة أويلر تقليل حجم الخطوة للحصول على نتائج مماثلة، مما يزيد من التكلفة الحسابية.

مثال 2: دالة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y \quad , \quad y(0) = 1$

يمكن تحليلها بالشكل $y = e^x$

معادلة التنبؤ:(Euler Predictor)

$$y_(n+1)\text{^}p = y_n + h f(x_n, y_n)$$

معادلة التصحيح:(Heun Corrector)

$$y_(n+1) = y_n + (h/2)[f(x_n, y_n) + f(x_(n+1), y_(n+1)\text{^}p)]$$

عند: h = 0.5

$$y_1\text{^}p = 1 + 0.5(1) = 1.5$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{0.5}{2}\right)(1 + 1.5) = 1.625$$

بالتالي نتحصل على الناتج

$$y(0.5) = e\text{^}0.5 = 1.64872$$

.....

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

مثال 3: دالة التفاضلية $y' = -2y \quad , \quad y(0) = 1$

يمكن تحليلها على الشكل التالي

$$y = e^{-2x}$$

مرحلة التنبؤ

$$y_1^p = 1 + 0.2(-2) = 0.6$$

مرحلة التصحيح

$$y_1 = 1 + \left(0.\frac{2}{2}\right)(-2 - 1.2) = 0.68$$

الحل الدقيق

$$y(0.2) = e^{-0.4} = 0.67032$$

تحليل النتائج

توضح النتائج أن طريقة التنبؤ والتصحيح (Predictor–Corrector) حققت تحسناً ملحوظاً في دقة الحل العددي مقارنة بطريقة أويلر، حيث ساهمت مرحلة التصحيح في تقليل الخطأ الناتج عن مرحلة التنبؤ الأولية. ويعود ذلك إلى أن طريقة أويلر تعتمد على ميل الدالة عند بداية الفترة الزمنية فقط، بينما تعتمد طريقة التنبؤ والتصحيح على استخدام قيمة متنبأ بها لحساب ميل إضافي عند نهاية الفترة، ثم يتم استخدام متوسط الميلين للحصول على قيمة أكثر دقة.

كما تبين أن الخطأ العددي يزداد تدريجياً مع زيادة قيمة المتغير المستقل(x) ، إلا أن معدل زيادة الخطأ في طريقة التنبؤ والتصحيح كان أقل بكثير من طريقة أويلر. ويظهر ذلك بوضوح عند مقارنة النتائج مع الحل التحليلي، حيث جاءت القيم المحسوبة بطريقة التنبؤ والتصحيح أقرب إلى القيم الدقيقة في جميع نقاط الحساب.

وتشير النتائج أيضاً إلى أن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة (RK4) ما زالت تحقق أعلى مستوى من الدقة، إذ تكاد تتطابق نتائجها مع الحل التحليلي، وذلك لاعتمادها على أربعة تقديرات للميل داخل كل خطوة. في المقابل، توفر طريقة التنبؤ والتصحيح توازناً جيداً بين الدقة والتكلفة الحسابية، فهي تحقق تحسناً كبيراً مقارنة بطريقة أويلر دون الحاجة إلى عدد العمليات الحسابية الذي تتطلبه طريقة رونج-كوتا.

وبناءً على ذلك، يمكن ترتيب الطرق المستخدمة من حيث الدقة العددية كما يلي:

رونج-كوتا من الرتبة الرابعة (RK4) > التنبؤ والتصحيح (Predictor–Corrector) > أويلر.(Euler)

وتؤكد هذه النتائج أن اختيار الطريقة العددية يعتمد على طبيعة التطبيق؛ فعند الحاجة إلى أعلى دقة ممكنة تُعد طريقة رونج-كوتا الخيار الأمثل، أما عند البحث عن توازن بين الدقة وسرعة التنفيذ، فإن طريقة التنبؤ والتصحيح تمثل بديلاً فعالاً، بينما تناسب طريقة أويلر التطبيقات التعليمية أو المسائل التي لا تتطلب دقة عالية.

الخـاتمـة

خلصت الدراسة إلى أن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة تعد الأكثر كفاءة في حل المعادلات التفاضلية العادية، لما توفره من دقة عالية واستقرار عددي أفضل مقارنة بطريقة أويلر، خاصة في التطبيقات العلمية والهندسية التي تتطلب نتائج دقيقة. وفي المقابل، تتميز طريقة أويلر بسهولة التنفيذ وانخفاض التكلفة الحسابية، مما يجعلها مناسبة للتطبيقات التعليمية والمسائل البسيطة. وتوضح نتائج المقارنة أن اختيار الطريقة العددية يجب أن يستند إلى طبيعة المسألة، ومستوى الدقة المطلوب، والموارد الحسابية المتاحة، بما يحقق أفضل توازن بين سرعة التنفيذ وجودة النتائج.

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

المراجع

1. Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons.
2. Ralston, A., & Rabinowitz, P. A first course in numerical analysis. Courier Corporation.2001
3. Lambert, J. D. Computational methods in ordinary differential equations. John Wiley & Sons.1973
4. Hairer, E., & Wanner, G. Linear multistep methods. Scholarpedia, 5(4), 4591.2010
5. Koroche, K. A., & Mayu, G. K. Adams–Bashforth–Moulton predictor–corrector method for solving first-order initial value problems and its error analysis. Indian Journal of Advanced Mathematics, 1(2), 30–40.2021
6. Odunayo, M. A., & Ogunwobi, Z. Comparison of Adams–Bashforth–Moulton method and Milne–Simpson method on second-order ordinary differential equations. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 9(1), 1–8.2021

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

7. Shior, M. M., Odo, C. E., Agbata, B. C., Ezugorie, I. G., & Arivi, S. S. Numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations by Adams–Moulton predictor–corrector method. International Journal of Mathematics and Computer Science, 7(3).2022
8. Olatunji, O., & Akeju, A. Comparative analysis of Euler and order four Runge–Kutta methods in Adams–Bashforth–Moulton predictor–corrector method. International Journal of Mathematics, Statistics and Computer Science, 3, 276–293.2025
9. Ji, X., & Zhou, J. Solving high-order uncertain differential equations via Runge–Kutta method. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 26(3), 1379–1386.2018
10. Al Ameely, A., & Albukhuttar, A. Solving system of Euler's equations using Runge–Kutta methods. Journal of University of Anbar for Pure Science, 17(2), 265–268.2023
11. Aliyi Koroche, K. Numerical solution of first-order ordinary differential equations using Runge–Kutta method. International Journal of Systems Science and Applied Mathematics, 6(1), 2021
12. Biswas, A., Ketcheson, D. I., Roberts, S., Seibold, B., & Shirokoff, D. Explicit Runge–Kutta methods that alleviate order reduction. arXiv. 2023
13. Chauhan, V., & Srivastava, P. K. Computational techniques based on Runge–Kutta methods of various orders and types for solving differential equations. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 4(2), 375–386.2019
14. Kaur, M., Bhatti, J., Kumar, S., & Thota, S. Explicit Runge–Kutta method for evaluating ordinary differential equations. WSEAS Transactions on Mathematics, 23, 167–175.2024
15. Kumar, I., & Bhardwaj, R. Numerical simulation of ordinary differential equations using Euler and Runge–Kutta techniques. Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics, 36, 8–17. 2023
16. Lee, K. C., Senu, N., Ahmadian, A., Ibrahim, S. N. I., & Baleanu, D. Numerical study of third-order ordinary differential equations using a new class of Runge–Kutta-type methods. Alexandria Engineering Journal, 59(4), 2449–2467.2020
17. Mechee, M. S., Fawzi, F. A., & Abdullah, S. M. Construction of numerical RKM method for solving twelfth-order ordinary differential equations. Iraqi Journal of Science, 65(4), 2074–2086.2024
18. Nupur, S., Akter, R., Tamanna, T. R., & Akter, P. Maximizing accuracy: Advancements in numerical methods for ordinary differential equations. Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics, 35, 18–27.2023
19. Paudel, D. R., & Bhatt, M. R. Comparative study of Euler's method and Runge–Kutta method to solve ordinary differential equations. Academic Journal of Mathematics Education. Vol. 6 No. 1 (2023).
20. Stephen, O. A., Adebowale, A. M., Senapon, W. A., Tolulope, K. M., & Jamiu, A. R. Comparative analysis of new Runge–Kutta-type techniques for solving initial value problems. International Journal of Scientific Advances, 5(3).2024
21. Suryaningrat, W., Ashgi, R., & Purwani, S. Order Runge–Kutta with extended formulation for solving ordinary differential equations. International Journal of Global Operations Research, 1(4), 160–167.2020
22. Ogunrinde, R. B. On some numerical methods for solving initial value problems in ordinary differential equations. IOSR Journal of Mathematics, 1(3), 25–31.2012
23. Trofimets, E. N., & Trofimets, V. Y. Research of numerical methods for solving ordinary differential equations in MS Excel. Journal of Physics: Conference Series, 1691(1).2020
24. Saragih, V. Y., Surbakti, G. B., Munthe, N. E., & Wardani, S. A. Implementation of Runge–Kutta method in projectile motion simulation. Bilangan: Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumian dan Angkasa, 2(5), 41–50.2024
25. Workineh, Y., Mekonnen, H., & Belew, B. Numerical methods for solving second-order initial value problems using Euler and Runge–Kutta methods. Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, 10.2024
26. Yousif, M. Ordinary differential equations and applied dynamics. Emirates Journal for Engineering Research, 25.2020

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of **AJAPAS** and/or the editor(s). **AJAPAS** and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.

 Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).