African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)

Volume 1, Issue 1, January 2022, Page No: 41-48
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index

دوال بيسل: المبادئ والتطبيقات
Bessel Functions: Principles and Applications

زينب أحمد خليفة[1*]، هاجر خالد أحمد[2]، ناجية المختار عمر[3]
Zaynab Ahmed Khalleefah[1*], Hajer Khaled Ahmed[2], Najeia Almoktar Omar[3]

[1،2،3]كلية العلوم الأصابعة، الأصابعة، جامعة غريان، ليبيا
[1,2,3] Department of Mathematics, Gharyan University, Gharyan, Libya.

[*]*Corresponding author: zaynab.zuwaliyah@gu.edu.ly*

تاريخ الاستلام: 2021-12-02
تاريخ القبول: 2021-12-29
تاريخ النشر: 2022-01-01

الكلمات المفتاحية:
دوال بيسل
معادلة بيسل
تطبيقات دوال بيسل

الملخص
تظهر معادلة بيسل عند الحاجة لحلول معادلة لابلاس ومعادلة هيلمتز في إحداثي أسطواني الإحداثيات الإسطوانية أو إحداثي كروي الإحداثيات الكروية. لذا فإن دوال بسل ذات أهمية كبرى في مسائل انتشار الموجة وجهد ساكن الساكنة .يهدف هذا البحث لدراسة دوال بيسل ومعادلات بيسل التفاضلية والتي لها العديد من التطبيقات العلمية والعملية في مجالات الرياضات والكيمياء والهندسة وكذلك الفيزياء وغيرها من العلوم، حيث تمت دراسة معادلة ودوال بيسل وتم عرض بعض تطبيقاتها التي لها أهمية كبيرة في كل المجالات.

Article history
Received : December 02, 2021
Accepted : December 29, 2021
Published : January 01, 2022

Keywords:
Bessel's Functions
Bessel's Equation
Applications of Bessel Functions

Abstract
Bessel's equation appears when solutions to Laplace's equation and Helmholtz equation are needed in cylindrical coordinate's cylindrical coordinates or spherical coordinates spherical coordinates. Therefore, the Bessel functions are of great importance in the problems of wave propagation and static potential. This research aims to study Bessel functions and Bessel differential equations, which have many scientific and practical applications in the fields of mathematics, chemistry, engineering as well as physics and other sciences, where the Bessel equation and functions were studied and some of its applications that are of great importance in all fields were presented.

1- المقدمة
تعتبر دوال بيسل من أهم الدوال الخاصة وأكثرها استخداماً في مجال الرياضيات والفيزياء والهندسة وغيرها من العلوم وتمثل أهمية كبيرة في هذه المجالات.

كان العالم الرياضي دانييل برنولي أول من عرفها ثم عممت من قبل فريدك بيسل. وتعرف دوال بيسل أيضًا بدوال الإسطوانة أو التوافقيات الإسطوانية وذلك لأنها تمثل الحل لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الإسطوانية وأيضًا في الإحداثيات الكروية، ولذلك فإن دوال بيسل ذات أهمية كبرى في مسائل انتشار الموجات منها

- موجات كهرومغناطيسية في دليل الموجة الإسطواني.
- قانون توصيل الحرارة في جسم اسطواني.

- أنماط التذبذب في جسم دائري (حلقي) غشاء صناعي.
- مسائل الانتشار على شكل شبكي.
- حلول معادلة شرود نجد في الإحداثيات الكروية لجسيم طليق.
وهناك تطبيقات أخرى لدوال بيسل وخواصها كما في معالجة الإشارة مثل اصطناع الإف إم، نافذة كايسر، ومرشح بيسل.

2- معادلة بيسل التفاضلية Bessel's Differential Equation

تعريف

المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (1)$$

تعرف بمعادلة بيسل ذات المرتبه p حيث p ثابت يعرف بالدليل، وهي حالة خاصة من المعادلة التفاضلية

$$(1 + Ax^H)y'' + \frac{1}{x}(B + Cx^H)y' + \frac{1}{x^2}(D + Ex^H)y = 0$$

حيث

$$H = 2\ ,\ \ E = 1\ ,\ \ D = -p^2\ ,\ \ C = 0\ ,\ \ B = 1\ ,\ \ A = 0$$

معادلة بيسل (1) تكون معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بناءً على التفاضلات المتعلقة بها حيث تسمى المعادلة تسمية الدليل، وليس بأعلى رتبة تفاضلية فيها ونقول عنها معادلة بيسل ذات الدليل p، وبكتابة المعادلة (1) في الصيغة المعتادة

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0$$

أو

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة بيسل التفاضلية، وهي كثيرة الاستخدام ليس فقط في مسائل تذبذب الغشاء الدائري بل في عدد كبير جداً من المسائل التطبيقية.

حيث $x = 0$ نقطة شاذة نظامية للمعادلة.

بهذا فإن المعادلة (1) لها حل على صورة متسلسلة فروبينيوس على الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad ,\ \ a_0 \neq 0\ , \qquad \lambda \in R$$

فنجد من التعويض في المعادلة (1) بقيم y'', y', y نحصل على

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\, a_n x^{n+\lambda-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\, a_n x^{n+\lambda-1} + (x^2 - p^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}((n+\lambda)^2 - p^2)\, a_n + a_{n-2})x^{n+\lambda} = 0$$

وبالتالي

$$((n+\lambda)^2 - p^2)a_n + a_{n-2}) = 0 \qquad *$$

ثم بوضع n=0 في $(n+\lambda)^2 - p^2$ ومنها $(\lambda^2 - p^2) = 0 \Leftarrow \lambda = \pm p$

في حالة $\lambda = p$ وبالتعويض في $*$ نحصل على الصيغة التكرارية

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n)(n+2p)} \quad ; \quad n \geq 2$$

فتكون

$$a_1 = 0$$

$$a_3 = \frac{a_1}{(n)(n+2p)} = \frac{0}{(n)(n+2p)}$$

$$a_5 = \frac{-a_1}{(n)(n+2p)} = \frac{0}{(n)(n+2p)} = 0$$

والقيم الزوجية تكون

$$a_2 = \frac{-a_0}{(2)(2)(1+p)}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{(4)(2)(2)^2(2+p)(1+p)}$$

$$a_6 = \frac{-a_0}{(6)(4)(2)(2)^3(3+p)(2+p)(1+p)}$$

وعموماً فإن

$$a_{2k+1} = 0 \qquad ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\big((2k)(2k-2)\ldots.6.4.2\big)2^k(k+p)(k-1+p)\ldots(2+p)(1+p)}$$

K= 1 , 2...

$$= \frac{(-1)^k a_0 \Gamma(1+p)}{2^k k!\,((k+p)(k+p-1)\ldots(2+p)(1+p)\Gamma(1+p)}$$

$$= \frac{(-1)^k a_0 \Gamma(1+p)}{2^k k!\,\Gamma(k+p+1)}$$

K= 0 , 1, 2...

وعليه فإن حل متسلسلة فروبنيوس لمعادلة بيسل التفاضلية يكون

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0} \frac{(-1)^n \Gamma(1+p)}{2^{2n} n!\,\Gamma(n+p+1)} x^{2n+p}$$

ويرمز له بالرمز $J_p(x)$ ويسمى بدالة بيسل من النوع الأول ذات الدليل p؛ حيث a_0 ثابت غير الصفر وليكن

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}$$

إذاً

$$J_p(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\;\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

وعندما $\lambda = -p$ فنحصل على:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\;\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

وهو حل معادلة بيسل التفاضلية المناظر لجذر الأدلة $\lambda = -p$ وبالتالي فإن الحل العام يكون

$$y = A\,J_p(x) + B\,J_{-p}$$

حيث B , A ثابتان اختياريان وأن $J_p(x)$ ، $J_{-p}(x)$ دالتين مستقلتين خطياً والدليل p ليس عدداً صحيحاً ($p \notin I$).

ولتبيان أن الدالتين $J_p(x)$ ، $J_{-p}(x)$ مستقلتين خطياً، عندما $p > 0$ وليس عدداً صحيحاً، ننشر الدالة $J_p(x)$

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{1}{\Gamma(p+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} + \frac{1}{2!\,\Gamma(p+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}$$

فنجد أن $J_p(x)$ عبارة عن متسلسلة بقوى موجبه فقط لـ x

$$J_p(0) = 0$$

وينشر الدالة $J_{-p}(x)$

$$J_{-p}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p} - \frac{1}{\Gamma(2-p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-p} + \frac{1}{2!\,\Gamma(3-p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4-p}$$

نجد أن $J_{-p}(x)$ متسلسلة لها على الأقل حد واحد بقوى سالبه لـ x

وتكون $J_{-p}(x)$ غير معرفه عند $x = 0$ إذ أن

$$\lim_{x \to 0} J_{-p}(x) = \infty$$

بهذا فإن الدالة $J_p(x)$ ليست مضاعفاً للدالة $J_{-p}(x)$

ويتأكد بذلك الاستقلال الخطي لحل معادلة بيسل التفاضلية ذات الدليل p

مثال

حل المعادلة

$$x^2y'' + xy'\left(7x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

بوضع

$$t = \sqrt{7}x \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}}t \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

إذاً

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \sqrt{7}\frac{dy}{dt} = \sqrt{7}y^*$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} = \left(\sqrt{7}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sqrt{7}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{7}\,.\sqrt{7}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 7\frac{d^2y}{dt^2} = 7y^{**}$$

من المعادلة الأصلية نجد أن

$$\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2(7y^{**}) + \left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)(\sqrt{7}y^*) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

$$t^2y^{**} + ty^* + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

وهي معادلة بيسل التفاضلية ذات الدليل $\frac{1}{2}$ ، والحل لها يكون

$$y(t) = A\,J_{\frac{1}{2}}(t) + B\,J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t + B\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$$

بما أن $t = \sqrt{7}x$ فالحل الكامل للمعادلة هو

$$y(x) = A\sqrt{\frac{2}{\sqrt{7}\pi x}}\sin\left(\sqrt{7}x\right) + B\sqrt{\frac{2}{\sqrt{7}\pi x}}\cos\left(\sqrt{7}x\right)$$

عندما $p = 0$ يكون

$$J_p(x) = J_{-p}(x) = J_0(x)$$

أي توجد دالة بيسل واحدة فقط $J_0(x)$ كحل لمعادلة بيسل التفاضلية ذلت الدليل 0

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

حيث

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,T(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots$$

عندما $p \in I$ ، $p \neq 0$ نجد أن

$$J_{-p}(x) = (-1)^pJ_p(x)$$

وهي بينه على أن أحداهما مضاعفة للأخرى، أي أنهما مرتبطتين خطياً، وبالتالي، فإن

$$y = A\,J_p(x) + B\,J_{-p}(x)$$

ليس حلاً لمعادلة بيسل التفاضلية.

3- دوال بيسل Bessel's Functions

دوال بيسل عبارة عن الحلول المستقلة خطيًا لمعادلة بيسل التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n.

حيث أن الصيغة العامة لدالة بيسل من النوع الأول ذات الدليل الصحيح تعطى على الصورة

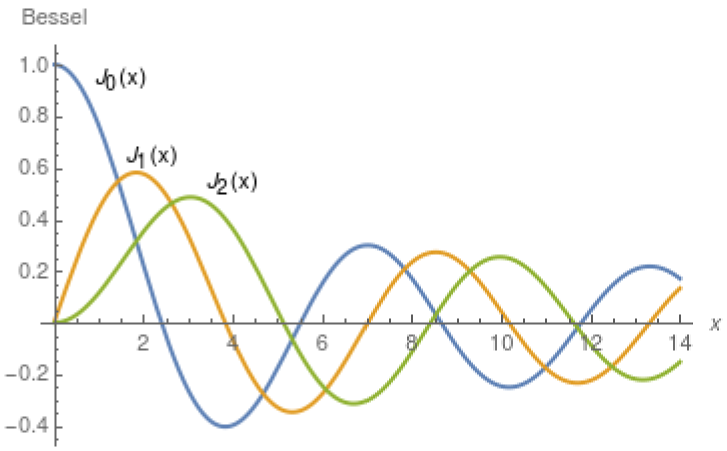
$$y_1 = J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \qquad (2)$$

حيث $k = \{0,1,2,\dots,\infty\}$

والصيغة العامة لدالة بيسل من النوع الثاني ذات الدليل الغير صحيح تعرف بالصيغة التالية

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} \qquad (3)$$

والشكل البياني التالي يوضح شكل دالة بيسل من النوع الأول



شكل 1 دالة بيسل من النوع الأول

من (2) نشتق دالة بيسل للمتغير x نجد أن

$$\frac{d\,J_p(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)} (2k+p) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \qquad (4)$$

والمعادلة (4) هي الصيغة التفاضلية لدالة بيسل من النوع الأول ولها الخواص الآتية

$$x\frac{\partial J_p}{\partial x} = p\,J_p(x) - x\,J_{p-1}$$

$$x\frac{\partial J_p}{\partial x} = x\,J_{p-1} - p\,J_p$$

$$2x\frac{\partial J_p}{\partial x} = J_{p-1} - J_{p+1}$$

$$2p\,J_p = x\left(J_{p-1} + J_{p+1}\right)$$

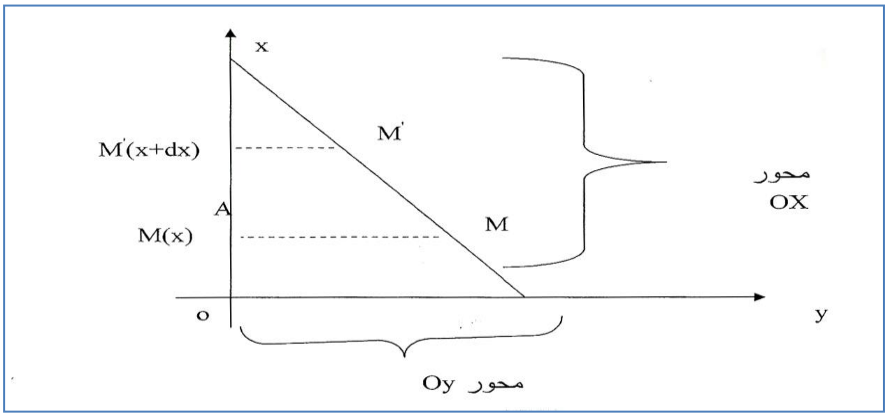
مبرهنة

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(2k)(x)^{2k+p-1}}{2^{2k+p} k!\,\Gamma(p+k+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p+1}}{2^{2k+p+1} k!\,\Gamma(p+k+2)} \qquad (5)$$

4- تطبيقات دوال بيسل Applications of Bessel Functions

1.4- الاهتزازات البسيطة لخيط مرن Vibrations simple elastic Thread

ليكن لدينا خيط مرن ثقيل طوله L معلق من إحدى نهايتيه A كما في الشكل الذي أمامنا



يأخذ الخيط في وضع السكون الوضع العمودي A_0 نزيح الخيط عن توازنه إزاحة بسيطة ونتركه يهتز لنعين المعادلة التي تعطي انزياح نهاية الخيط B وذلك في حالة اقتصارها على الاهتزازات البسيطة المستوية نأخذ المحور OA كمحور Ox والخط الذي نأخذه B كمحور Oy لنأخذ القطعة MM' من الخيط .

أن القوة المطبقة على هذه القطعة هي المسقط على Oy لزدياد التوتر T للخيط على طول MM' أي $\partial\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ فالقوة المؤثرة في وحدة الأطوال تكون $f = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

يعطي التوتر على ارتفاع قدره x بالمقدار $T = \mu g x$ حيث μ هي الكثافة الطولية للخيط وهكذا يكون

$$f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu g x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$f = \mu g\frac{\partial y}{\partial x}\ \ \mu g x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\therefore f = \mu g\left[\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

وبما أن $f = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ فتكون معادلة الحركة

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu g\left[\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

وبفرض أن

$$y = \phi(x)e^{iwt}$$

نعوض في المعادلة بقيمة y فيحصل

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\phi(x)e^{iwt}}{\partial t^2}\left[\frac{\partial\phi(x)e^{iwt}}{\partial x} + x\frac{\partial^2\phi(x)e^{iwt}}{\partial x^2}\right] \qquad (*)$$

$$\because y = \phi(x)e^{iwt}$$

$$\therefore y' = e^{iwt}.\frac{d\phi}{dx}$$

$$\therefore y'' = e^{iwt}.\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = iw\,\phi(x)\,e^{iwt}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -w^2\,\phi(x)\,e^{iwt}$$

نعوض عن جميع القيم في $(*)$

$$\frac{1}{g}\left(-w^2\ \phi(x)\ e^{iwt}\right) = \left[e^{iwt}\ \frac{d\phi}{dx} + \ x\, e^{iwt}\frac{d^2\phi}{dx^2}\right]$$

بضرب جميع الأطراف في e^{-iwt}

$$\frac{-1}{g} w^2\ \phi(x) = \left[\frac{d\phi}{dx} + \ x\ \frac{d^2\phi}{dx^2}\right]$$

بمساواة الطرفين بالصفر

$$\left[\frac{d\phi}{dx} + \ x\ \frac{d^2\phi}{dx^2}\right] + \ \frac{w^2}{g}\ \phi(x) = 0$$

$$x\ \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} + \ \ \frac{w^2}{g}\ \phi(x) = 0$$

بالقسمة على x

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\ \frac{d\phi}{dx} + \ \ \frac{w^2}{gx}\ \phi(x) = 0$$

وهذه المعادلة فيها $c = \frac{w^2}{g}$

$$\therefore \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\ \frac{d\phi}{dx} + \ \ \frac{1}{x}\ c\ \phi(x) = 0$$

2.4- الجهد v في الإحداثيات القطبية الإسطوانية

الجهد vعند النقطة (x, y, z) يعطى بالمعادلة

$$\nabla^2 v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v = 0 \qquad (6)$$

وهي معادلة لابلاس، فإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية الإسطوانية r, θ, z حيث

$$x = r\cos\theta \quad , \qquad y = r\sin\theta \qquad , \qquad z = z$$

تصبح المعادلة (6) على الصورة

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad (7)$$

ولحل المعادلة (7) نأخذ

$$v = R(r)\emptyset(\theta)Z(z) \qquad (8)$$

بحيث أن

$$\lim_{z\to\infty} v = 0 \qquad , \qquad v(r, \theta + 2\pi, z) \qquad (9)$$

من (7) و (8) نحصل على

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\theta} + \frac{d^2\emptyset}{dr^2} = \frac{-1}{z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

الطرف الأيسر دالة في (r, θ) والطرف الأيمن دالة في z وحيث أن الطرفان متساويان فإن كلا منهما يمثل مقدار ثابت لذا سنأخذ

$$\frac{1}{z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \lambda$$

1- في حالة $\lambda = 0$ فإن $z = c_1 z + c_2$

ومن (9) نحصل على الحل التافه (الصفري) أي أن $z = 0\ ,\ v = 0$

2- في حالة $\lambda < 0$ فإن $Z = c_1\cos kz + c_2\sin kz \quad , \quad k \neq 0 \quad , \quad \lambda = -k^2$

وهي لا تحقق المعادلة (9) لأن $|z| \neq 0$

3- في حالة $\lambda > 0$ نضع $Z = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} \quad , \quad \lambda = k^2$

ومن (9) نحصل على $c_1 = 0$ ويكون

$$z = ce^{-kz} \qquad (10)$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2\theta}\frac{d^2\emptyset}{d\theta^2}+\lambda=0$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{\theta}\frac{d^2\emptyset}{d\theta^2}+k^2r^2=0$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+k^2r^2=-\frac{1}{\emptyset}\frac{d^2\emptyset}{d\theta^2}=-\mu$$

1- إذا كانت $\mu=0 \;\Rightarrow\; \emptyset=c_1\theta+c_2$

وهذا يتناقض مع (9).

2- إذا كانت $\mu>0 \;\Rightarrow\; \mu=m^2 \;,m\neq 0 \;\Rightarrow\; \theta=c_1e^{m\theta}+c_2e^{-m\theta}$

ولا تتحقق المعادلة (9) إذا كانت $\mu<0\;,\;\mu=m^2\;,\;m\neq 0$

$$\Rightarrow\quad \emptyset=c_1\cos m\theta+c_2\sin m\theta \qquad (11)$$

حيث $\emptyset$ دالة دورية دورتها 2π إذا كانت m عدد صحيح فقط

$$\Rightarrow\quad \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+k^2r^2-m^2=0$$

$$\Rightarrow\quad r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-m^2)R=0 \qquad (12)$$

$$\Rightarrow\quad r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(\rho^2-m^2)R=0 \qquad (13)$$

وحل هذه المعادلة يكون على الصورة

$$R(\rho,m)=J_m(rk) \qquad (14)$$

من المعادلات (10)، (11)، (13)، (14) فإن حل المعادلة (7) يعطى بالمعادلة

$$v(r,\theta,z)=cJ_m(kr)[c_1\cos m\theta+c_2\sin m\theta]e^{-kz}$$

نأخذ

$$y=R \;\;,\;\; x=\rho$$

تصبح المعادلة (13) على الصورة

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$$

5- النتائج والتوصيات

في هذه الدراسة تم عرض معادلات بيسل التفاضلية ودوال بيسل والتي تعتبر من أهم الدوال الخاصة والأكثر استخدامًا في مجالات الرياضيات والفيزياء والهندسة وغيرها من العلوم، كما تم التطرق لبعض تطبيقات دوال بيسل حيث أنه لدوال بيسل عدة تطبيقات في الكثير من المجالات وأشهرها التطبيقات في مجال الفيزياء وأهمها التطبيقات في مسائل انتشار الموجات ومن بينها الموجات الكهرومغناطيسية، واستنتجنا أن دوال بيسل لها أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات العلمية، والتي نجدها ونواجهها باستمرار عمليًا، ونوصي بدراسة مقارنة بين تطبيقات دوال بيسل.

6- المراجع

1) علي أحمد ضو ومحمود توفيق، مقدمة في الدوال الخاصة، دار الكتب الوطنية، بنغازي، الطبعة الأولى،2007م.
2) إسماعيل أبوبكر بوقفة، المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، جامعة عمر المختار، البيضاء، الطبعة الأولى، 1999م.
3) وليم بويس وريتشارد دبريما، مبادئ المعادلات التفاضلية، ترجمة: أحمد علاونة وحسن العزة، مركز الكتب الأردني، الطبعة الثالثة، 1990م.
4) الزوام أحمد دلة واخرون، المعادلات التفاضلية العادية،منشورات جامعة الجبل الغربي،1997م.
5) ماري سبيجل، المعادلات التفاضلية التطبيقية، ترجمة: رمضان محمد جهيمة، حسن الزغداني وإبراهيم غبريال، منشورات جامعة الفاتح،1998م.
6) Frank Bowman, Introduction to Bessel Functions, Dover Publications Inc, New York.
7) Thair Y. Thanoon and Omar Thaher shalal, Studying the Bessell Equation of Complex Order, Al-Irfidain Journal of Computer Science and Mathematics, Volume 13, Issue 2,2019.
8) B. G. Korenev, Bessel Fuctions and their Applications, A. P. Prudnikov, Russia.
9) Orin J. Farrell and Bertram Ross, Solved Problems in Analysis as Applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel Functions, Dover Publications Inc, New York.