African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)

Online ISSN: 2957-644X

Volume 2, Issue 3, July-September 2023, Page No: 346-361

Website: *https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index*

||Arab Impact factor 2022: 0.87|| SJIFactor 2023: 5.689|| ISI 2022-2023: 0.557

مقدر بييز لمعلمة القياس لتوزيع رايلي تحت دالة خسارة مقترحة باستخدام نوعين من التوزيعات السابقة

حنان الحسني عبد الله*

قسم الرياضيات، كلية العلوم الأصابعة، جامعة غريان، ليبيا

Bayesian Estimator for the Scale Parameter of The Rayleigh Distribution Under a Proposed Loss Function Using Two Types of the Prior Distributions

Hanan ALhosni Abdullah*

Department of Mathematics, College of Science/AL-Asabaa, Gharyan University, Libya.

Corresponding author: hananalhosni14@gmail.com

Received: July 24, 2023	Accepted: September 05, 2023	Published: September 10, 2023

الملخص

يهدف هذا البحث إلى إيجاد مقدر بييز لمعلمة القياس لتوزيع رايلي تحت دالة خسارة مقترحة والتي سميت بدالة الخسارة التربيعية المعممة، باستخدام نوعين من التوزيعات السابقة (غير معلوماتية) أحدهما معتمد على معلومات جيفري، والأخر معتمد على معلومات جيفري الموسعة، وبتوظيف اسلوب مونت كارلو للمحاكاة تمت مقارنة مقدرات بييز الناتجة عن دالة الخسارة المقترحة مع مقدر بييز القياسي لمعرفة مدى فاعلية دالة الخسارة المقترحة في تقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي، وذلك بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE).

وقد أظهرت النتائج أن مقدرات بييز تحت دالة الخسارة المقترحة باستخدام التوزيع السابق المعتمد على معلومات جيفري الموسعة كانت أفضل المقدرات لكل قيم المعلمة وحجوم العينات المستخدمة في هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: توزيع رايلي، مقدر بييز، دالة الخسارة التربيعية المعممة، جيفري الموسعة.

Abstract

This research aims to find a Bayesian estimator for the scale parameter of the Rayleigh distribution under a proposed loss function, which is called the generalized squared loss function, using two types of prior distributions (non-informative), one of which is based on Jeffrey's information, and the other is based on the extended Jeffrey's information, And by employing the Monte Carlo method of simulation, the Bayesian estimators resulting from the proposed loss function were compared with the standard Bayesian estimator to find out the effectiveness of the proposed loss function in estimating the scale parameter of the Rayleigh distribution. This is based on the mean squared error (MSE).

The results showed that the Bayesian estimators under the proposed loss function using the prior distribution based on the extended Jeffrey information were the best estimators for all parameter values and sample sizes used in this research.

Keywords: Rayleigh Distribution, Bayes Estimator, Generalized Square Loss Function, Extension of Jeffrey's.

1- المقدمة

يعتبر توزيع رايلي من التوزيعات الاحتمالية المستمرة، وذات التطبيقات الواسعة لمتغير الزمن المستغرق لحين حصول الفشل، مثل زمن المكائن والمعدات، وعمر المريض الذي يعاني من مرض خطير، فهو يستخدم لتمثيل أوقات البقاء منذ زمن حصول المرض ولحين الوفاة [1].
وقد عمل الباحثون على ايجاد أفضل مقدرات توزيعات وقت الفشل لان الكثير من البيانات التي تظهر في الواقع التطبيقي تسلك سلوك توزيع معين قد يمثل توزيع الوقت المستغرق لحين حصول الفشل في الأجهزة الحساسة والغالية الثمن كالأجهزة الطبية، أو الاعضاء البشرية مثلا وهنا تكمن أهمية السعي الدائم للباحثين لاعتماد طرق احصائية دقيقة لتقدير معلمات توزيع رايلي ذي المعلمتين. فقد قام الباحثان في دراستهم [2] بالمقارنة بين مقدرات بيزية وأخرى غير بيزية لمعلمة القياس ومعولية توزيع رايلي ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة، كما استخدمت الباحثة اسلوب المحاكاة للمقارنة بين مقدرات معلومة وأخرى مقترحة لمعلمة القياس ومعولية توزيع رايلي ذي المعلمتين [3]، وفي دراسة حديثة قارنت الباحثة بين خمس طرق مختلفة لتقدير معلمة القياس لنفس التوزيع باستخدام المحاكاة [4].
وفي دراسة اخرى مهتمة ايضاً بتقدير معالم توزيعات الفشل فقد اقترح الباحثان دالة خسارة تربيعية معممة جديدة لإيجاد مقدر بييز لمعلمة القياس لتوزيع وايبل [5]، واستخدمت كلا الدراستين[7] [6]نفس دالة الخسارة المقترحة في الدراسة [5] مع إضافة بعض التعديل عليها لتصبح دالة خسارة تربيعية معممة موزونة واستخدماها في ايجاد مقدر بييز لمعلمة القياس لتوزيع لابلاس وتوزيع ماكسويل على التوالي.
أما الهدف من هذا البحث فهو ايجاد مقدر بييز المعمم لمعلمة القياس لتوزيع رايلي ذي المعلمتين تحت نفس دالة الخسارة المقترحة في الدراسة [5] باستخدام نوعين من التوزيعات السابقة ومقارنة نتائج مقدرات بييز الناتجة عن هذه الدالة المقترحة مع مقدر بييز القياسي لمعرفة مدى فاعلية دالة الخسارة المقترحة الجديدة في استخدامها لإيجاد مقدر بييز لمعلمة قياس توزيع رايلي ذي المعلمتين.

2- توزيع رايلي Rayleigh distribution:

إن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي ذي المعلمتين (α , β) تأخذ الصيغة التالية:

$$f(t;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{2\,(t-\alpha)}{\beta}\; e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} & \alpha<t<\infty;\quad \beta>0\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad ...(1)$$

حيث α تمثل معلمة الشكل، β تمثل معلمة القياس.

- دالة التوزيع التراكمي Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F(t;\alpha,\beta)=P(T\le t)=\int_{\alpha}^{t} f(u)\,du = 1-e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \qquad ...(2)$$

- دالة الإمكان الاعظم: LikeLihood Function

$$L(t_1,t_2,t_3,...,t_n;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\beta)=2^n\,\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\; e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}} \qquad ...(3)$$

2- تقدير بييز لمعلمة القياس. β Bayesian Estimation .

سيتم في هذا المبحث تقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي باستخدام مقدر بييز تحت نوعين من دوال الخسارة:

- **دالة الخسارة التربيعية المتعارف عليها.**

$$L(\hat{\beta},\beta)=(\hat{\beta}-\beta)^2 \qquad ...(4)$$

وهذا ما يعرف بمقدر بييز القياسي.

- **دالة الخسارة المقترحة.**

اقترح الباحثين [5] صيغة جديدة لدالة الخسارة اطلقا عليها اسم (دالة الخسارة التربيعية المعممة) واستخدماها في تقدير معلمة القياس لتوزيع وايبل عرفاها كالاتي

$$L(\hat{\beta},\beta)=\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\,\beta_i\right)(\hat{\beta}-\beta)^2 \qquad ....(5)$$

حيث: a_i ثوابت و $i=0,1,2,....k$

وهذا ما سنطلق عليه اسم مقدر بييز المعمم.

1.3- مقدر بييز القياسي (S.B) Standard Bayes Estimator [4].

إذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1,t_2,t_3,...t_n)$ من توزيع رايلي كما بالمعادلة (1) وأردنا تقدير المعلمة β باستخدام أسلوب بييز القياسي في هذه الحالة فإن التوزيع السابق للمعلمة β يتم ايجاده من خلال صيغة جيفري المعتمدة على معلومة فيشير حسب الخطوات التالية:

$$g_1(\beta)=k\sqrt{i(\beta)} \qquad ....(6)$$

حيث أن $i(\beta)$ يمثل معلومات فيشير Fisher information وهي

$$i(\beta)=-E\left(\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial\beta^2}\right)=\frac{n}{\beta^2}$$

وبذلك يكون التوزيع السابق:

$$g_1(\beta)=k\frac{\sqrt{n}}{\beta} \qquad ...(7)$$

وبناءً على ذلك سيكون التوزيع اللاحق كما يلي:

$$h_1(\beta/t)=\frac{L(t;\alpha,\beta)\,g(\beta)}{\int_0^\infty L(t;\alpha,\beta)\,g(\beta)\,d\beta}$$

$$=\frac{2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}\,\frac{k\sqrt{n}}{\beta}}{\int_0^\infty 2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}\,\frac{k\sqrt{n}}{\beta}\,d\beta}$$

وبعد إجراء التكامل حسب قاعدة كاما واجراء الاختصارات المطلوبة يكون التوزيع اللاحق

$$h_1(\beta/\underline{t}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2} \quad ...(8)$$

أما مقدر بييز القياسي فيمكن ايجاده من خلال تقليل دالة الخسارة (4) أقل ما يمكن:

$$R = E(L(\hat{\beta},\beta)) = \int_0^\infty (\hat{\beta}-\beta)^2 \ h_1(\beta/\underline{t})\ dt$$
$$= \hat{\beta}^2 - 2\hat{\beta}E(\beta) + \varphi(\beta) \quad ...(9)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية ل (9) بالنسبة $\hat{\beta}$ ومساواتها بالصفر نحصل على مقدر بييز القياسي:

$$\hat{\beta}_{BS} = E(\beta/\underline{t}) = \int_0^\infty \beta \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2} d\beta$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2}{n-1} \quad ...(10)$$

2.3- مقدر بييز المعمم (Generalized Bayes Estimator)

بناءً على دالة الخسارة المقترحة (5) تكون الصيغة العامة لمقدر بييز المعمم هي:

$$R = E(L) = \int_0^\infty (a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + ... + a_k\beta^k)(\hat{\beta}^2 - 2\hat{\beta}\beta + \beta^2)\ \ h(\beta/\underline{t})\ dt$$
$$= a_0\,\hat{\beta}^2 - 2a_0\,\hat{\beta}\,E(\beta) + a_0E(\beta^2) + a_1\,\hat{\beta}^2\,E(\beta) - 2a_1\,\hat{\beta}\,E(\beta^2) + a_1\,E(\beta^3) + ...$$
$$+ a_k\,\hat{\beta}^2\,E(\beta^k) - 2a_k\,\hat{\beta}\,E(\beta^{k+1}) + a_k\,E(\beta^{k+2}) \quad ...(11)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (11) بالنسبة $\hat{\beta}$ ومساواتها بالصفر نحصل على مقدر بييز المعمم التالي:

$$\hat{\beta}_{GB} = \frac{a_0\ E(\beta) + a_1\ E(\beta^2) + ... + a_k\ E(\beta^{k+1})}{a_0 + a_1\ E(\beta) + ... + a_k\ E(\beta^k)}$$
$$= \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i\ E(\beta^{i+1})}{\sum_{i=0}^{k} a_i\ E(\beta^i)} \quad ....(12)$$

حيث: a_i ثوابت و $i = 0,1,2,....k$

ملاحظة: عندما $k = 0$ فإن مقدر بييز المعمم يتحول الى مقدر بييز القياسي

ولكي يتم الحصول على تقدير بييز لابد لنا من إيجاد التوزيع السابق ولكن في حالة عدم توفر معلومات كافية حول المعلمات المراد تقديرها أو في حالة عدم توفرها بشكل تام عندئذ

ستكون دالة التوزيع السابق غير معلوماتية ومن الأفضل استعمال صيغة جفري (Jeffrey's Formula) لاستخراج التوزيع السابق [8] .

ولإيجاد مقدر بييز المعمم الناتج عن دالة الخسارة المعممة الجديدة سنستخدم نوعين من التوزيعات السابقة غير معلوماتية (non-informative) احداهما معتمد على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) والأخر معتمد على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) كما يلي:

1.2.3- مقدر بييز المعمم باستخدام التوزيع السابق المعتمد على معلومات جيفري.

Generalized Bayes Estimator Using prior distribution based on Jeffery's Information.

للحصول على مقدر بييز المعمم حسب المعادلة (12) وباستخدام نفس التوزيع السابق (7) والتوزيع اللاحق (8) الناتج عنه لابد من ايجاد $E(\beta^k)$ كما يلي:

$$E(\beta^k) = \int_0^\infty \beta^k h_1(\beta/\underline{t})\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta^k \frac{\left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2}\, d\beta$$

$$let\ \ T = \left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right) \quad , y = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{y} \ \Rightarrow d\beta = -\frac{1}{y^2}\, dy$$

$$= \frac{T^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-k-1}\, e^{-yT}\, dy$$

$$E(\beta^k) = \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(n)} T^k \qquad OR \quad E(\beta^k) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right)^k}{\prod_{i=1}^k (n-i)} \qquad ...(13)$$

وبذلك يكون:

$$E(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2}{(n-1)} \qquad ...(14)$$

$$E(\beta^2) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right)^2}{\prod_{i=1}^2 (n-i)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right)^2}{(n-1)(n-2)} \ . \qquad ..(15)$$

$$E(\beta^3) = \frac{T^3}{\prod_{i=1}^3 (n-i)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (t-\alpha)^2\right)^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \qquad ...(16)$$

وهكذا لبقية قيم k

i. الصيغة الاولى لمقدر بييز المعمم عندما $k=1$ $(\hat{\beta}_{GBJ1})$

عند وضع $k=1$ وبالتعويض ب (14) و (15) في المعادلة (12) نحصل على مقدر بييز المعمم في الصيغة الخطية التالية:

$$\hat{\beta}_{GBJ1}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)}{a_0+a_1\ E(\beta)}=\frac{a_0\left(\frac{T}{(n-1)}\right)+a_1\left(\frac{(T)^2}{(n-1)(n-2)}\right)}{a_0+a_1\left(\frac{T}{(n-1)}\right)}$$

$$=\frac{a_0\,(n-2)T+a_1\ T^2}{a_0(n-1)(n-2)+a_1\,(n-2)T} \qquad (17)$$

الصيغة الثانية لمقدر بييز المعمم عندما $k=2$ $\hat{\beta}_{GBJ2}$

عند وضع $k=2$ وبالتعويض ب (14) و (15) و(16) في المعادلة (12) نحصل على مقدر بييز المعمم في الصيغة التربيعية التالية:

$$\hat{\beta}_{GBJ2}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)+a_2E(\beta^3)}{a_0+a_1\ E(\beta)+a_2E(\beta^2)}$$

$$=\frac{a_0\left(\frac{T}{(n-1)}\right)+a_1\left(\frac{T^2}{(n-1)(n-2)}\right)+a_2\left(\frac{T^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\right)}{a_0+a_1\left(\frac{T}{(n-1)}\right)+a_2\left(\frac{T^2}{(n-1)(n-2)}\right)}$$

$$=\frac{a_0\,(n-2)\,(n-3)T+a_1\,(n-3)\ T^2+a_2\ T^3}{a_0\,(n-1)\,(n-2)(n-3)+a_1\,(n-2)(n-3)\,T+a_2\,(n-3)T^2} \qquad ...(18)$$

حيث أن $T=\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2$

2.2.3 -مقدر بييز المعمم باستخدام التوزيع السابق المعتمد على معلومات جيفري الموسعة.

Generalized Bayes Estimator Using prior distribution based on Extension Jeffery's Information.

للحصول على مقدر بييز المعمم سنفترض أن التوزيع السابق لمعلمة القياس βمعتمد على معلومات جيفري الموسعة كما يلي:

$$g_2(\beta)\propto\left(\frac{n}{\beta^2}\right)^c \qquad c\in R^+$$

$$g_2(\beta)=k\left(\frac{n^c}{\beta^{2c}}\right) \qquad c>0\,and\,k\ is\ constant \qquad ...(19)$$

وبناءً على دالة الامكانية العظمى (3) والتوزيع السابق (19) يكون التوزيع اللاحق كما يلي:

$$h_2(\beta/\underline{t}) = \frac{L(\underline{t};\alpha,\beta)\,g(\beta)}{\int_0^\infty L(\underline{t};\alpha,\beta)\,g(\beta)\,d\beta} = \frac{2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\; e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}\; k\left(\frac{n^c}{\beta^{2c}}\right)}{\int_0^\infty 2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\; e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}\; k\left(\frac{n^c}{\beta^{2c}}\right)d\beta}..$$

$$h_2(\beta/\underline{t}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)^{n+2c-1}}{\Gamma(n+2c-1)}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+2c} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2} \qquad ...(20)$$

وللحصول على مقدر بييز المعمم حسب المعادلة (12) وفق التوزيع اللاحق $h_2(\beta/\underline{t})$ (20) لابد من ايجاد $E(\beta^k)$ كما يلي:

$$E(\beta^k) = \int_0^\infty \beta^k h_2(\beta/\underline{t})\,d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta^k \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)^{n+2c-1}}{\Gamma(n+2c-1)}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n+2c} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2}\, d\beta$$

$$let\ \ T = \left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)\ \ , y = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{y}\ \ \Rightarrow d\beta = -\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$= \frac{T^{n+2c-1}}{\Gamma(n+2c-1)}\int_0^\infty y^{n+2c-k-2}\; e^{-yT}\,dy$$

$$E(\beta^k) = \frac{\Gamma(n+2c-k-1)}{\Gamma(n+2c-1)}T^k \qquad ...(21)$$

وبذلك يكون:

$$E(\beta) = \frac{T}{(Z-1)} \qquad ...(22)$$

$$E(\beta^2) = \frac{T^2}{\prod_{i=1}^{2}(z-i)} = \frac{T^2}{(Z-1)(Z-2)} \qquad ...(23)$$

$$E(\beta^3) = \frac{T^3}{\prod_{i=1}^{3}(z-i)} = \frac{T^3}{(Z-1)(Z-2)(Z-3)} \qquad ....(24)$$

$$z = n+2c-1\,, \qquad T = \left(\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2\right)$$

وهكذا لبقية قيم k

i. الصيغة الاولى لمقدر بييز المعمم عندما $k=1$ $(\hat{\beta}_{GBE1})$

عند وضع $k=1$ وبالتعويض ب (22) و (23) في المعادلة (12) نحصل على مقدر بييز المعمم في الصيغة الخطية التالية:

$$\hat{\beta}_{GBE1}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)}{a_0+a_1\ E(\beta)}$$

$$=\frac{a_0\,(n+2c-3)T+a_1\ T^2}{a_0\,(n+2c-2)\,(n+2c-3)+a_1\,(n+2c-3)T} \qquad ...(25)$$

عندما $c=1$ نحصل على:

$$\hat{\beta}_{GBE11}=\frac{a_0\,(n-1)T+a_1\ T^2}{a_0\ n(n-1)+a_1\,(n-1)T} \qquad ...(26)$$

وعندما $c=2$ نحصل على:

$$\hat{\beta}_{GBE12}=\frac{a_0\,(n+1)T+a_1\ T^2}{a_0\,(n+1)\,(n+2)+a_1\,(n+1)T} \qquad ...(27)$$

ii. الصيغة الثانية لمقدر بييز المعمم عندما $k=2$ $(\hat{\beta}_{GBE2})$.

عند وضع $k=2$ وبالتعويض ب (22) و (23) و(24) في المعادلة (12) نحصل على مقدر بييز المعمم في الصيغة التربيعية التالية:

$$\hat{\beta}_{GBE2}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)+a_2E(\beta^3)}{a_0+a_1\ E(\beta)+a_2E(\beta^2)}$$

$$=\frac{a_0\,(z-3)\,(z-4)T+a_1\,(z-4)\ T^2+a_2\,T^3}{a_0(z-2)\,(z-3)(z-4)+a_1\,(z-3)(z-4)T+a_2\,(z-4)T^2} \qquad ...(28)$$

عندما $c=1$ نحصل على:

$$\hat{\beta}_{GBE21}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)+a_2E(\beta^3)}{a_0+a_1\ E(\beta)+a_2E(\beta^2)}$$

$$=\frac{a_0\,(n-1)\,(n-2)T+a_1\,(n-2)\ T^2+a_2\,T^3}{a_0(n)\,(n-1)(n-2)+a_1\,(n-1)(n-2)T+a_2\,(n-2)T^2} \qquad ...(29)$$

وعندما $c=2$ نحصل على:

$$\hat{\beta}_{GBE22}=\frac{a_0\ E(\beta)+a_1\ E(\beta^2)+a_2E(\beta^3)}{a_0+a_1\ E(\beta)+a_2E(\beta^2)}$$

$$=\frac{a_0\ n\ (n+1)\ T+a_1 n\ T^2+a_2\ T^3}{a_0\,(n)\,(n+1)\,(n+2)+a_1\,(n+1)\,nT+a_2\,nT^2} \qquad ...(30)$$

حيث أن $T=\sum_{i=1}^{n}(t-\alpha)^2$

نموذج المحاكاة

1- افتراض قيم لمعلمتي التوزيع $(\alpha = 2)$ $(\beta = o.5, 1.5, 3)$

2- اختيار حجم العينات المولدة $(n = 10, 50, 100)$

3- اختيار حجم تكرار كل تجربة $(R = 5000)$

4- توليد عينات تتبع توزيع رايلي بقيم المعلمتين المفترضة في الخطوة رقم1 حسب طريقة المعكوس حيث:

$$t = \alpha + \sqrt{-\beta \ln(1-u)} \qquad ...(31)$$

5- تقدير معلمة القياس β تحت دالة الخسارة الجديدة حسب الصيغ (10), (17), (18), (26), (27), (29) و(30).وذلك بفرض نموذجين لقيم معاملات صيغ بييز المعمم السابقة:

الجدول (1): قيم معاملات صيغ مقدر بييز المعمم

a_i / Mod	a_0	a_1	a_2
A	500	0.5	0.2
B	1.5	1	0.5

6- المقارنة بين مقدرات بييز المعمم الناتج عن الصيغ السابقة ومقدر بييز القياسي بواسطة متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R}(\hat{\beta}-\beta)}{R}$$

1.4- نتائج المحاكاة

يتم عرض نتائج المحاكاة حسب الجداول التالية وتحليلها لغرض الوصول الى أفضل المقدرات لمعلمة القياس تحت دالة الخسارة الجديدة وباستخدام نوعين من التوزيعات السابقة.

الجدول (2): تقديرات بييز للمعلمة β وقيم (MSE) عندما ($\beta = 0.5$)

n	mod	Criteria	Standard Bayes Estimator	Generalized Bayes Estimator					
				Jeffrey's Information		Extension of Jeffrey's Information			
				$\hat{\beta}_{GBJ1}$	$\hat{\beta}_{GBJ2}$	$\hat{\beta}_{GBE11}$	$\hat{\beta}_{GBE12}$	$\hat{\beta}_{GBE21}$	$\hat{\beta}_{GBE22}$
10	*A*	$\hat{\beta}$	0.5563	0.5603	0.5609	0.5036	0.4189	0.5040	0.4191
		MSE	0.0324	0.0336	0.0339	0.0242	**0.0233**	0.024	0.0233
	B	$\hat{\beta}$	0.5535	0.5731	0.5856	0.5127	0.4238	0.5211	0.4280
		MSE	0.0335	0.0398	0.0454	0.0275	0.0243	0.0300	0.0246
50	*A*	$\hat{\beta}$	0.5103	0.5108	0.5109	0.5006	0.4813	0.5006	0.4813
		MSE	0.0054	0.0054	0.0054	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051
	B	$\hat{\beta}$	0.5104	0.5131	0.5143	0.5028	0.4833	0.5039	0.4843
		MSE	0.0052	0.0054	0.0055	0.0050	0.0049	0.0051	0.0049
100	*A*	$\hat{\beta}$	0.5048	0.5050	0.5051	0.5000	0.4902	0.5000	0.4902
		MSE	0.0026	0.0026	0.0026	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
	B	$\hat{\beta}$	0.5052	0.5065	0.5070	0.5014	0.4915	0.5019	0.4920
		MSE	0.0026	0.0026	0.0026	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025

إن ما يُستنتج من الجدول (2) وبصفة عامة هو ان مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) كانت أفضل من باقي المقدرات. ثم يليها مقدر بييز القياسي ثم تأتي مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) في المرتبة الاخيرة.

كما أن $\hat{\beta}_{GBE12}$ هو المقدر الافضل من بين كل المقدرات بالنسبة للنموذجين (A,B) ولكل احجام العينات، ثم يليه المقدر $\hat{\beta}_{GBE22}$ كما نلاحظ أن نتائج مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) كانت جدا متقاربة وتتطابق كلما زاد حجم العينة.

كما أن $\hat{\beta}_{GBJ1}$ هو أفضل مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) وقريب جدا من مقدر بييز القياسي ولكن الفرق واضح بينهما وبين المقدر الافضل $\hat{\beta}_{GBE12}$ كما نلاحظ من الرسم البياني التالي:

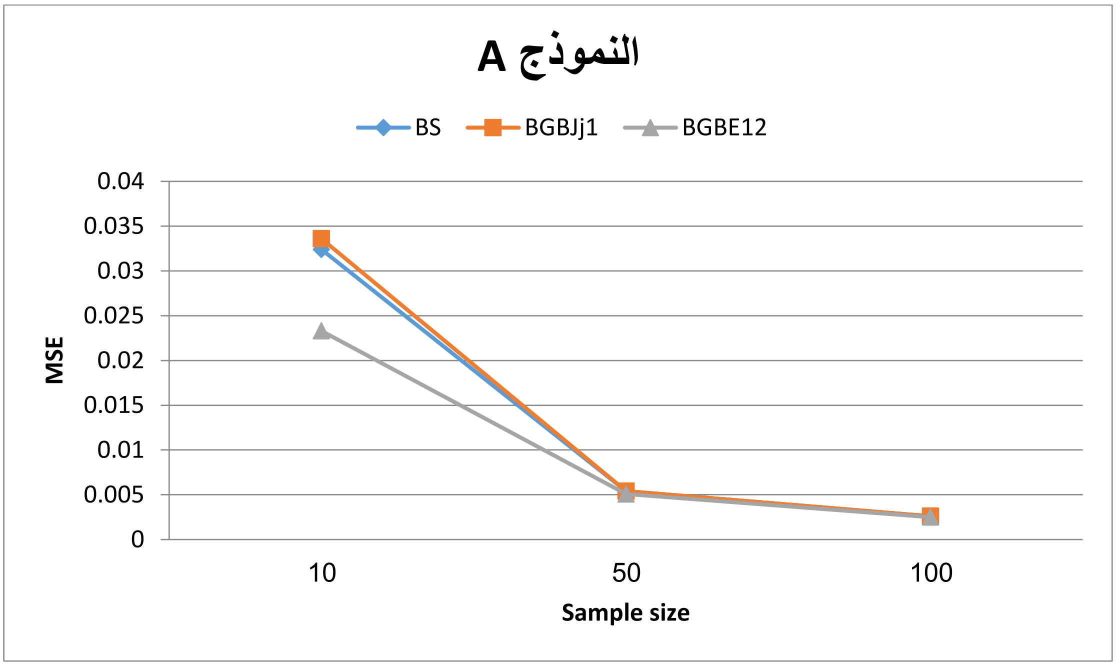

Figure1: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=0.5 and Model A.

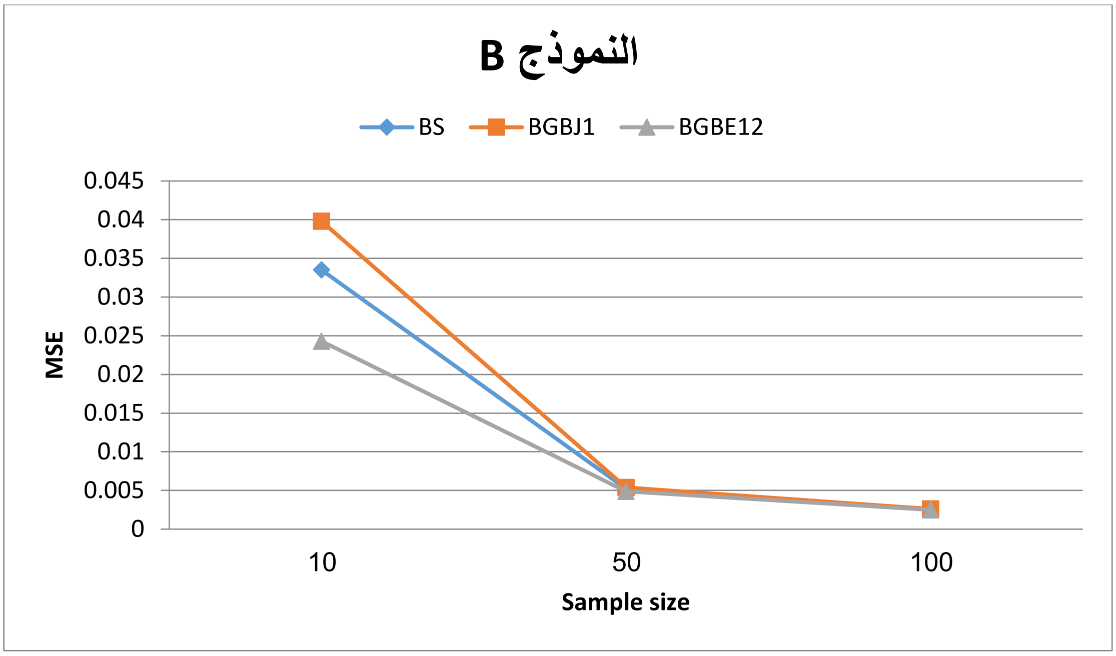

Figure 2: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=0.5 and Model B.

الجدول (3): تقديرات بييز للمعلمة β وقيم (MSE) عندما ($\beta = 1.5$)

n	mod	Criteria	Standard Bayes Estimator	Generalized Bayes Estimator					
				Jeffrey's Information		Extension of Jeffrey's Information			
				$\hat{\beta}_{GBJ1}$	$\hat{\beta}_{GBJ2}$	$\hat{\beta}_{GBE11}$	$\hat{\beta}_{GBE12}$	$\hat{\beta}_{GBE21}$	$\hat{\beta}_{GBE22}$
10	*A*	$\hat{\beta}$	1.6717	1.7037	1.7181	1.5280	1.2674	1.5373	1.2719
		MSE	0.3057	0.3375	0.3570	0.2376	**0.2158**	0.2461	0.2169
	B	$\hat{\beta}$	1.6700	1.7824	1.9093	1.5886	1.3058	1.6793	1.3562
		MSE	0.3100	0.4184	0.5939	0.2754	0.2169	0.3569	0.2271
50	*A*	$\hat{\beta}$	1.5333	1.5376	1.5389	1.5067	1.4484	1.5079	1.4495
		MSE	0.0468	0.0476	0.0479	0.0444	0.0436	0.0446	0.0437
	B	$\hat{\beta}$	1.5332	1.5494	1.5635	1.5180	1.4587	1.5312	1.4705
		MSE	0.0466	0.0494	0.0526	0.0454	0.0433	0.0475	0.0438
100	*A*	$\hat{\beta}$	1.5153	1.5173	1.5179	1.5021	1.4726	1.5027	1.4731
		MSE	0.0230	0.0231	0.0232	0.0224	0.0223	0.0224	0.0223
	B	$\hat{\beta}$	1.5162	1.5240	1.5306	1.5086	1.4788	1.5150	1.4848
		MSE	0.0229	0.0236	0.0243	0.0226	0.0221	0.0232	0.0223

تبين من نتائج الجدول (3) ان مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) قد تفوقت على باقي المقدرات وبشكل واضح. ثم يليها مقدر بييز القياسي ثم تأتي مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) في المرتبة الاخيرة.

كما أن $\hat{\beta}_{GBE12}$ هو المقدر الافضل من بين كل المقدرات بالنسبة للنموذجين (A,B) ولكل احجام العينات، ثم يليه المقدر $\hat{\beta}_{GBE22}$.

ونلاحظ أن $\hat{\beta}_{GBJ1}$ هو أفضل مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) ولكن الفرق كان واضحاً في هذا الجدول بينه وبين مقدر بييز القياسي وكذلك بينه وبين المقدر الافضل $\hat{\beta}_{GBE12}$ كما نلاحظ من الرسم البياني التالي:

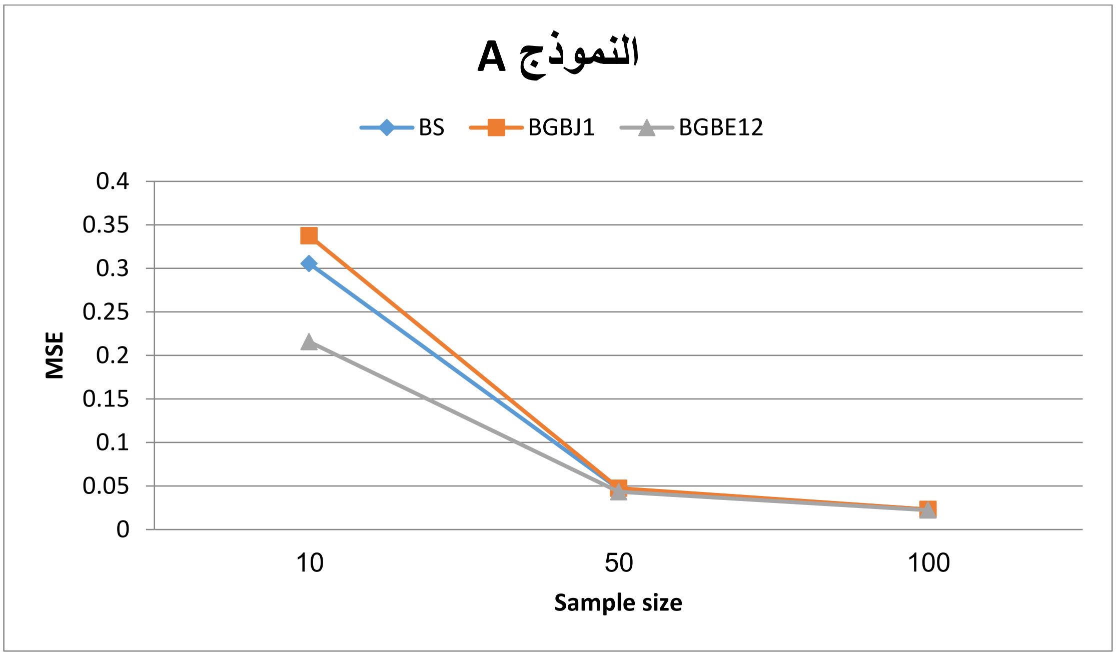

Figure 3: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=1.5 and Model A.

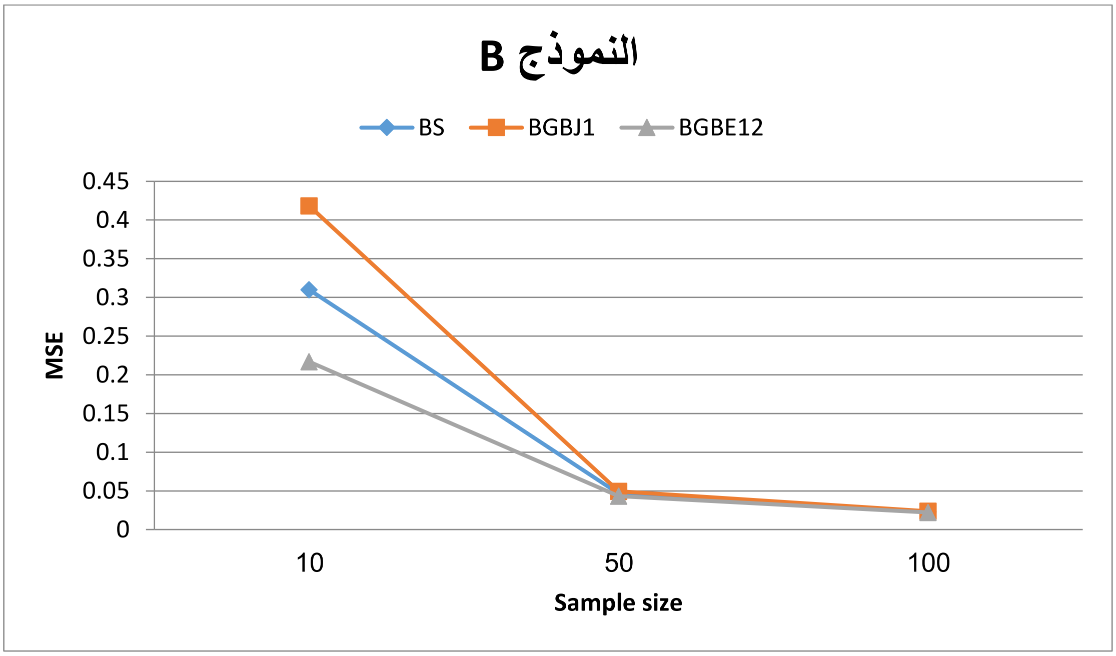

Figure 4: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=1.5 and Model B.

الجدول (4): تقديرات بييز للمعلمة β وقيم (MSE) عندما ($\beta = 3$)

n	mod	Criteria	Standard Bayes Estimator	Generalized Bayes Estimator					
				Jeffrey's Information		Extension of Jeffrey's Information			
				$\hat{\beta}_{GBJ1}$	$\hat{\beta}_{GBJ2}$	$\hat{\beta}_{GBE11}$	$\hat{\beta}_{GBE12}$	$\hat{\beta}_{GBE21}$	$\hat{\beta}_{GBE22}$
10	*A*	$\hat{\beta}$	3.3434	3.4537	3.5385	3.0907	**2.5560**	3.1474	2.5842
		MSE	1.2226	1.4398	1.6710	0.9898	0.8619	1.0922	0.8750
	B	$\hat{\beta}$	3.3379	3.6284	4.0070	3.2291	**2.6476**	3.5104	2.8155
		MSE	1.1651	1.6966	2.7174	1.0803	0.8115	1.5599	0.8603
50	*A*	$\hat{\beta}$	3.0666	3.0817	3.0899	3.0196	2.9025	3.0272	2.9091
		MSE	0.1872	0.1927	0.1965	0.1789	0.1744	0.1815	0.1750
	B	$\hat{\beta}$	3.0616	3.1045	3.1494	3.0413	2.9223	3.0839	2.9608
		MSE	0.1947	0.2090	0.2289	0.1917	0.1814	0.2051	0.1840
100	*A*	$\hat{\beta}$	3.0305	3.0378	3.0415	3.0073	2.9481	3.0109	2.9514
		MSE	0.0918	0.0931	0.0940	0.0899	0.0890	0.0905	0.0892
	B	$\hat{\beta}$	3.0287	3.0494	3.0706	3.0186	2.9589	3.0393	2.9785
		MSE	0.0919	0.0952	0.0997	0.0913	0.0890	0.0943	0.0896

يوضح الجدول (4) أنه عندما تكون قيمة β كبيرة ($\beta = 3$) يزداد تفوق مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) على بقية المقدرات، وأن $\hat{\beta}_{GBE12}$ هو المقدر الافضل من بين كل المقدرات بالنسبة للنموذجين (A,B) ولكل احجام العينات، ثم يليه المقدر $\hat{\beta}_{GBE22}$. كما أن $\hat{\beta}_{GBJ2}$ هو أسوء المقدرات على الاطلاق حيث أنه سجل أعلى قيمة ل MSE عندما n=10 في النموذج B وهي (2.7174).

ونلاحظ أن $\hat{\beta}_{GBJ1}$ هو أفضل مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) ولكن الفرق ازداد وضوحاً في هذا الجدول بينه وبين مقدر بييز القياسي وكذلك بينه وبين المقدر الافضل $\hat{\beta}_{GBE12}$ كما نلاحظ من الرسم البياني التالي:

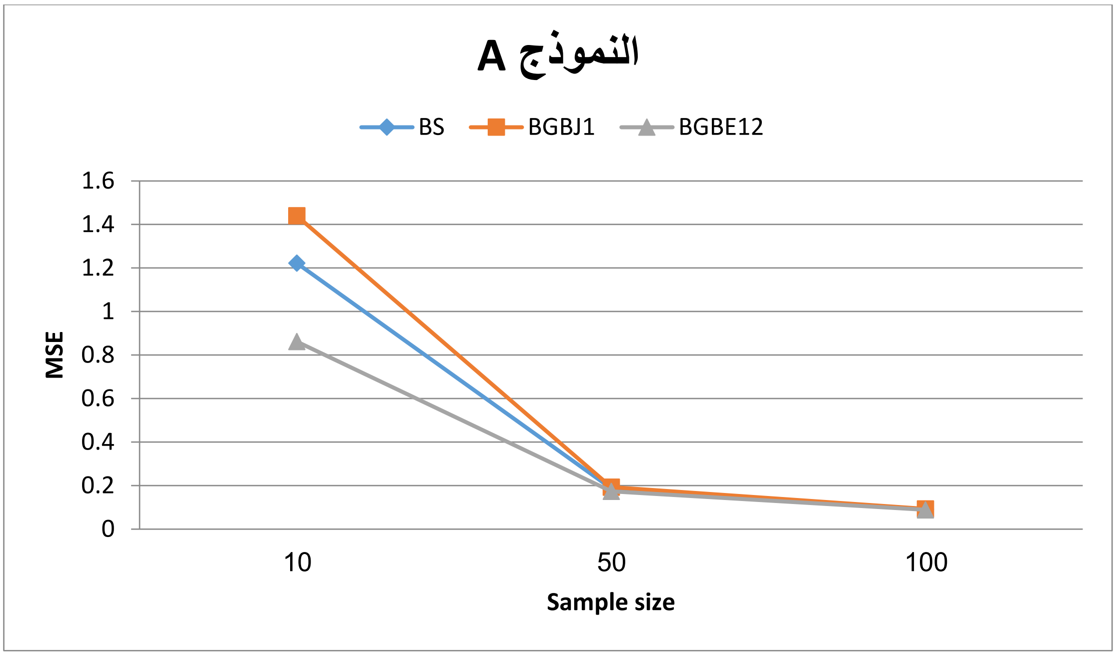

Figure 5: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=3 and Model A.

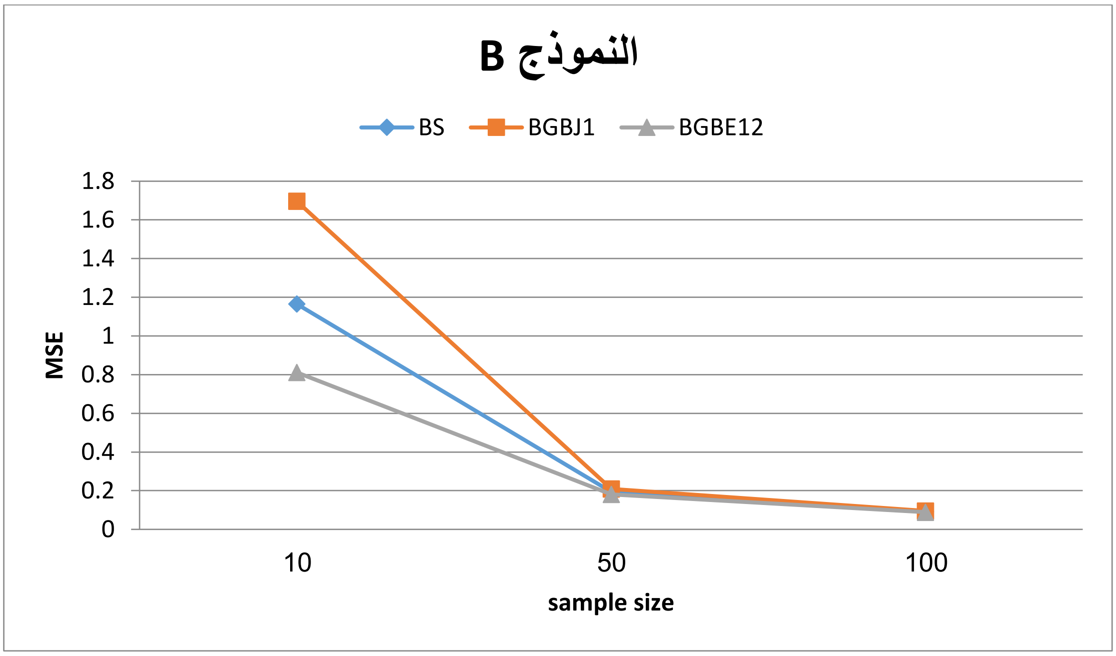

Figure 6: MSE's of three estimators of scale parameter of Rayleigh Distribution with B=3 and Model B.

3- الاستنتاجات.

من خلال دراسة وتحليل نتائج المحاكاة المتمثلة في الجداول (2)، (3)، (4) والتي احتوت على قيم لتقديرات معلمة القياس لتوزيع رايلي ذي المعلمتين وقيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لهذه التقديرات يمكن استنتاج التالي:

- أن مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) كانت هي الافضل بكل صيغها من باقي المقدرات. ثم يليها مقدر بييز القياسي ثم تأتي مقدرات بييز المعممة المعتمدة على معلومات جيفري (Jeffrey's Information) في المرتبة الاخيرة.
- لكل أحجام العينات وقيم β المستخدمة في هذا البحث كان مقدر بييز تحت دالة الخسارة التربيعية المقترحة باستخدام التوزيع السابق المعتمد على معلومات جيفري الموسعة عندما $k=1, c=2$ أي $(\hat{\beta}_{GBE12})$ هو المقدر الافضل من بين كل المقدرات بالنسبة للنموذجين (A,B)، ثم يليه المقدر $(\hat{\beta}_{GBE22})$.
- أما عن أفضل الصيغ لدالة الخسارة التربيعية المقترحة محل الدراسة فكانت الصيغة الخطية $k=1$ باستخدام أي من التوزيعين السابقين. وكان النموذج الاول (A) أي عندما يكون a_0 لها قيمة أكبر بكثير من قيم بقية المعاملات هو أفضل من النموذج (B) الذي تكون فيه قيم المعاملات صغيرة ومتقاربة من بعضها.
- ما يؤكد صحة الجانب النظري لهذا البحث أن قيمة (MSE) تتناسب عكسياً مع قيمة حجم العينة وطرديا مع قيمة المعلمة المراد تقديرها β.

4- التوصيات.

- يمكن استخدام مقدر بييز المعمم تحت دالة الخسارة المقترحة باستخدام التوزيع السابق المعتمد على معلومات جيفري الموسعة (Extension of Jeffrey's Information) لتقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي ذي المعلمتين.
- دراسة استخدام دالة الخسارة التربيعية المقترحة لتقدير معالم توزيعات اوقات الفشل الاخرى.

المراجع:

[1] أ. سمير. محمد، "مقارنة طرائق مختلفة لتقدير معلمة القياس ودالة المعولية لتوزيع رايلي ذي المعلمتين مع تطبيق عملي" ، مجلة القادسية للعلوم الادارية والاقتصادية، ص. 201-219، 2013.

[2] ع.كاظم. حمادي، س. نجم. عبود، "المقارنة بين مقدرات بيزية وغير بيزية لمعلمة القياس ومعولية توزيع رايلي ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة،" المجلة العراقية للعلوم الأحصائية، ص.125-146 ، 2011.

[3] أ. عزيز. عبداللطيف، "استخدام المحاكاة للمقارنة بين مقدرات معلومة ومقترحة لمعلمة القياس ومعولية توزيع رايلي ذي المعلمتين"، مجلة ميسان للدراسات الأكاديمية، ص. 120-134، 2012.

[4] ح. الحسني. عبدالله، "مقارنة بعض طرق تقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة" ، مجلة صدى المعرفة، ص. 152-170، 2021.

[5] ع. حمزة.الناصر، م. أكرم. صالح، "استخدام دالة خسارة معممة لطريقة بييز لتقدير معلمة القياس ودالة المعولية لتوزيع وايبل"، المجلة العراقية للعلوم الأحصائية،ص. 185-198 , 2009.

[6] E. Al-shareefi, H Rasheed, "Bays Estimator For the Scal Parameter of Laplace distribution under a

Suggested Loos Function"‹International Journal of Advanced Research ‹pp. 788-796,2015.

[7] Z. Khalifa,H Rasheed, " Some Bayes Estimators Maxwell Distribution by Using New loss Function" ,Al-Mustansiriyah Journal of Science ‹ pp. 103-111, 2017 .

[8] ج. حسن. لازم، "مقارنة طرائق بييز القياسية مع طرائق بيزية أخرى لتقدير دالة المعولية لتوزيع Rayleigh باستخدام المحاكاة،،" مجلة الادارة والاقتصاد، ص 111-131، 2013.

[9] T. AL-Baldaw," Comparison of Maximum Likelihood and some Bayes Estimators for Maxwell Distribution based on Non-informative Priors "‹Baghdad Science Journal ‹ pp .480- 488,2012.

[10] S.Day,"Minimax Estimation Of The Parameter Of The Rayleigh Distribution Under Quadratic Loss Function "‹Data Science Journal, pp23-30, 2008 .

[11] N.AL-Obedy,T. ALBaldawi, H Rasheed," Some Bayes Estimators for Laplace Distribution Under Different Loss Functions "‹Journal of Babylon University/pure and Applied Sciences ‹ pp. 975-983, 2014.